

откуда с помощью соотношения (5.35) получим следующие выражения для коэффициентов диффузии:

$$\epsilon_f = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_f^2}(t) = \int_0^{\infty} E_{f_L}(n) \frac{\sin 2\pi n t}{2\pi n} dn$$

и (5.122)

$$\epsilon_p = \int_0^{\infty} E_{p_L}(n) \frac{\sin 2\pi n t}{2\pi n} dn.$$

При малом времени диффузии

$$\epsilon_f = t \int_0^{\infty} E_{f_L}(n) dn = \overline{v_f^2} t$$

и

$$\epsilon_p = t \int_0^{\infty} E_{p_L}(n) dn = \overline{v_p^2} t,$$

откуда

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = \frac{\overline{v_p^2}}{\overline{v_f^2}}. \quad (5.123)$$

При большом времени диффузии основная роль вновь принадлежит низкочастотным компонентам движения:

$$\epsilon_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} E_{f_L}\left(\frac{\theta}{2\pi t}\right) d\theta = \frac{1}{4} E_{f_L}(0)$$

и аналогично $\epsilon_p = \frac{1}{4} E_{p_L}(0)$.

Эти соотношения можно также получить из четного преобразования Фурье от выражения (5.120), если положить, что $n = 0$.

Отсюда

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = \frac{E_{p_L}(0)}{E_{f_L}(0)} = 1, \quad (5.124)$$

что следует из соотношения

$$\frac{E_{p_L}(n)}{E_{f_L}(n)} = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = [1 + f_1(\omega)]^2 + f_2^2(\omega), \quad (5.125)$$

поскольку $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Это и есть результат, полученный Ченом.

Но при большом времени диффузии коэффициент диффузии можно записать как $\epsilon_f = v'_f \Lambda_L$. Поскольку $v'_p \neq v'_f$, то, по-видимому, $\Lambda_{pL} \neq \Lambda_{fL}$, причем это неравенство таково, что величина $v'_f \Lambda_{pL}$ в точности как раз и равна $v'_f \Lambda_{fL}$.

Результат (5.124), состоящий в том, что $\epsilon_p = \epsilon_f$, противоречит следствию соотношения (5.123) для малого времени диффузии, а именно: $\epsilon_p \neq \epsilon_f$, так как $\overline{v_p^2} \neq \overline{v_f^2}$.

Согласно равенству $\epsilon_f = \frac{1}{4} E_{fL}(0)$, коэффициент диффузии пропорционален той доле кинетической энергии, которая приходится на турбулентное движение с нулевой частотой. Но при нулевой частоте никакого различия между движением частицы и движением жидкости не существует. Следовательно, с физической точки зрения представляется весьма логичным, что, если это уравнение выполняется, то коэффициенты диффузии для дискретной частицы и для жидких частиц должны быть одинаковы. До сих пор для дискретной частицы принимался линейный закон сопротивления. Но при нулевой частоте характер закона сопротивления не играет никакой роли, так как при этом не наблюдается отставания дискретной частицы от жидкости. Отсюда со всей очевидностью следует вывод, что результат (5.124) должен быть справедлив безотносительно к характеру закона сопротивления.

Этот вывод, разумеется, несправедлив при $n \neq 0$, так как соотношение (5.125) получено именно для случая линейного закона сопротивления, а при нелинейном законе сопротивления оно имело бы иной вид. Кроме того, формула (5.124) справедлива только для бесконечно большого времени диффузии. Следовательно, если пытаться применить этот результат к турбулентному течению в аппаратах, имеющих конечные размеры, то необходимо удостовериться в том, что область турбулентности не только достаточно однородна, но также и достаточно велика по сравнению, например, с лагранжевым пространственным интегральным масштабом. В большинстве случаев реального течения это требование вряд ли выполняется, так что может наблюдаться не только различие, хотя и незначительное, между значениями ϵ_p и ϵ_f , но также и влияние закона сопротивления на ϵ_p , а следовательно, и на ϵ_p/ϵ_f .

Чтобы лучше понять смысл различия величин ϵ_p и ϵ_f , когда время диффузии невелико, предположим, что коэффициент лагранжевой корреляции для движения жидкости может быть представлен в виде экспоненциальной зависимости:

$$R_{fL}(t) = \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{T}_{fL}}\right).$$

Тогда соответствующий лагранжев энергетический спектр запишется в виде

$$E_{f_L}(n) = 4\overline{v}_f^2 \frac{\mathcal{J}_{f_L}}{1 + \omega^2 \mathcal{J}_{f_L}^2}.$$

Примем, далее, что сила Бассэ в уравнении (5.116) пренебрежимо мала и, следовательно, величиной c в выражениях для $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ можно пренебречь. Тогда имеем

$$E_{p_L}(n) = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} E_{f_L}(n) = \frac{a^2 + b^2\omega^2}{a^2 + \omega^2} E_{f_L}(n).$$

Следовательно,

$$E_{p_L}(n) = 4\overline{v}_f^2 \frac{a^2 + b^2\omega^2}{a^2 + \omega^2} \frac{\mathcal{J}_{f_L}}{1 + \omega^2 \mathcal{J}_{f_L}^2}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{v}_p^2 &= \int_0^\infty E_{p_L}(n) dn = \frac{2}{\pi} \overline{v}_f^2 \mathcal{J}_{f_L} \int_0^\infty \frac{a^2 + b^2\omega^2}{(a^2 + \omega^2)(1 + \omega^2 \mathcal{J}_{f_L}^2)} d\omega = \\ &= \frac{a\mathcal{J}_{f_L} + b^2}{a\mathcal{J}_{f_L} + 1} \overline{v}_f^2. \end{aligned}$$

Согласно этому соотношению между \overline{v}_p^2 и \overline{v}_f^2 , равенство $\overline{v}_p^2 = \overline{v}_f^2$ должно выполняться только при $b=1$, т. е. при $\rho_p = \rho_f$; этот результат является вполне очевидным. Далее,

$$\begin{aligned} R_{p_L}(t) &= \frac{1}{\overline{v}_{p0}^2} \int_0^\infty E_{p_L}(n) \cos \omega t dn = \frac{2}{\pi} \frac{\overline{v}_f^2}{\overline{v}_p^2} \mathcal{J}_{f_L} \int_0^\infty \frac{(a^2 + b^2\omega^2) \cos \omega t}{(a^2 + \omega^2)(1 + \omega^2 \mathcal{J}_{f_L}^2)} d\omega = \\ &= \frac{\overline{v}_f^2}{\overline{v}_p^2} \frac{1}{a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - 1} \left[(a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - b^2) \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - a\mathcal{J}_{f_L} (1 - b^2) \exp(-at) \right] = \\ &= \frac{1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \left[\frac{(a^2 \mathcal{J}_{f_L}^2 - b^2) \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right)}{a\mathcal{J}_{f_L} + b^2} - \frac{a\mathcal{J}_{f_L} (1 - b^2)}{a\mathcal{J}_{f_L} + b^2} \exp(-at) \right]. \end{aligned}$$

Стало быть, можно сделать вывод о том, что коэффициент лагранжевой корреляции для движения дискретной частицы уже больше не определяется единственной экспоненциальной функцией.

По коэффициенту лагранжевой корреляции можно с помощью уравнения (5.36) определить коэффициент диффузии:

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \overline{v_p^2} \int_0^t R_{pL}(\tau) d\tau = \\ &= \overline{v_f^2} \mathcal{J}_{fL} \left[1 - \frac{(a^2 \mathcal{J}_{fL}^2 - b^2) \exp(-t/\mathcal{J}_{fL}) - (1 - b^2) \exp(-at)}{a^2 \mathcal{J}_{fL}^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Тогда при $\epsilon_f = \overline{v_f^2} \mathcal{J}_{fL} [1 - \exp(-t/\mathcal{J}_{fL})]$ после некоторых преобразований получим

$$\frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} = 1 + \frac{1 - b^2}{a^2 \mathcal{J}_{fL}^2 - 1} \frac{\exp(-at) - \exp(-t/\mathcal{J}_{fL})}{1 - \exp(-t/\mathcal{J}_{fL})}.$$

Разница в поведении дискретных частиц и жидкости становится более ощутимой с уменьшением величины b , т. е. при убывании отношения ρ_f/ρ_p . В случае твердых частиц в турбулентном потоке воздуха при атмосферных условиях величина ρ_f/ρ_p имеет порядок $1/2000$; поэтому можно принять $b = 0$.

На рис. 5.11 показано, как в этом случае с увеличением n убывает величина $E_{pL}(n)/E_{fL}(n) = a^2/(a^2 + 4\pi^2 n^2)$, а на рис. 5.12 изображено, как возрастает отношение ϵ_p/ϵ_f по времени при различных значениях параметра $a\mathcal{J}_{fL}$: 0,1, 1 и 10. Для определенности заметим, что для частиц с диаметром $\cdot 100$ мк величина a — порядка 10 сек⁻¹.

Другим интересным предельным случаем является тот, когда плотность дискретной частицы мала по сравнению с плотностью жидкости. Этот случай наблюдается при дисперсии мелких пузырьков газа в турбулентном потоке жидкости. При $\rho_p/\rho_f \rightarrow 0$ величина $b \rightarrow 3$. Обычно силой Бассэ пренебрегать нельзя, но если принять, что вязкость жидкости стремится к нулю, то значения a и c тоже обращаются в нуль. Тогда уравнение (5.116) сводится к соотношению

$$\frac{dv_p}{dt} \approx b \frac{dv_f}{dt},$$

где $b \rightarrow 3$. При этом существенную роль играют только силы, связанные с градиентом давления в жидкости и с относительным уско-

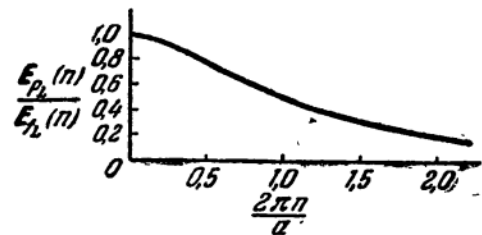


Рис. 5.11. Убывание отношения энергетических спектров дискретной частицы и жидкости с увеличением частоты при $\rho_f/\rho_p \rightarrow 0$.

рением виртуальной массы. Записанное выше уравнение представляет результат равновесия двух этих сил.

Далее, из соотношений (5.119) и (5.125) получается следующий замечательный результат, что при $a = c = 0$

$$\frac{E_{pL}(n)}{E_{fL}(n)} = \frac{\overline{v_p^2}}{v_f^2} = b^2 \approx 9,$$

т. е. интенсивность и амплитуды пульсационного движения частицы значительно больше тех же характеристик для жидкости. Из формул (5.120) вытекает, что

$$R_{pL}(t) = R_{fL}(t)$$

и следовательно,

$$\mathcal{J}_{pL} = \mathcal{J}_{fL}.$$

Таким образом, всегда выполняется равенство $\epsilon_p/\epsilon_f = \overline{v_p^2}/v_f^2 = b^2$, которое также непосредственно вытекает из соотношений (5.122).

Однако, как только a оказывается не нулем, а конечной величиной, отношение ϵ_p/ϵ_f становится функцией времени, стремящейся

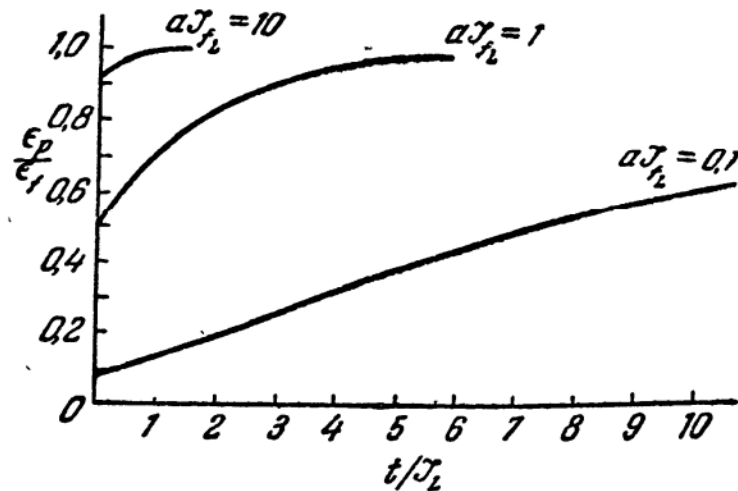


Рис. 5.12. Возрастание отношения коэффициентов диффузии дискретной частицы и жидкости в зависимости от времени при различных значениях $a\mathcal{J}_{fL}$ и при $\rho_f/\rho_p \rightarrow 0$.

при $t \rightarrow \infty$ к значению 1. При $a \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ выражение для ϵ_p/ϵ_f становится неопределенным.

Этот параграф мы закончим рассмотрением влияния разницы плотностей дискретной частицы и жидкости на индукционный период [70], который наблюдается тогда, когда условия движения дискретных частиц в начальный момент не соответствуют стационарному случаю, например, если частицы в начале процесса диффузии находятся

в покоем состоянии. Логично ожидать, что этот эффект с увеличением отношения ρ_p/ρ_f будет усиливаться. Поэтому будем рассматривать в последующем лишь настолько большие значения ρ_p/ρ_f , что коэффициент $b \approx 0$. Но тогда одновременно и коэффициент $c \approx 0$. В этом случае уравнение (5.116) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dv_p}{dt} + av_p = av_f.$$

Пусть $v_{p\infty}(t)$ — решение этого уравнения при установившемся состоянии. Решение, которое удовлетворяет начальному условию

$$t = 0 \quad v_p = 0,$$

запишется так:

$$v_p(t) = v_{p\infty}(t) - v_{p\infty}(0) \exp(-at).$$

Рассмотрим снова большое число дискретных частиц, начальный момент движения которых обозначим через t_0 и положим, что в этот момент $y_p(t_0) = 0$. По истечении времени t распространение $y_p(t_0 + t)$ будет равно

$$\begin{aligned} y_p(t_0 + t) &= \int_0^t v_p(t_0 + t') dt' = \\ &= \int_0^t v_{p\infty}(t_0 + t') dt' - v_{p\infty}(t_0) \int_0^t \exp(-at') dt' = \\ &= \int_0^t v_{p\infty}(t_0 + t') dt' - \frac{v_{p\infty}(t_0)}{a} [1 - \exp(-at)]. \end{aligned}$$

Возьмем от этого выражения его среднеквадратичное значение по большому числу частиц:

$$\begin{aligned} \overline{y_p^2}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 \int_0^t dt' \int_0^t v_{p\infty}(t_0 + t') v_{p\infty}(t_0 + t'') dt'' + \\ &+ \frac{[1 - \exp(-at)]^2}{a^2 T} \int_0^T v_{p\infty}^2(t_0) dt_0 - \\ &- \frac{2}{aT} [1 - \exp(-at)] \int_0^T dt_0 \int_0^t v_{p\infty}(t_0) v_{p\infty}(t_0 + t') dt'. \end{aligned}$$

Поскольку при однородной стационарной турбулентности

$$\overline{v_{p\infty}^2(t_0)} = \overline{v_{p\infty}^2(t_0 + t')} = \overline{v_{p\infty}^2},$$

то из предыдущего уравнения, изменяя порядок интегрирования и пользуясь описанным выше методом, получаем

$$\overline{y_p^2(t)} = \overline{v_{p\infty}^2} \left\{ 2 \int_0^t (t - \tau) R_{p_L}(\tau) d\tau - \frac{2}{a} [1 - \exp(-at)] \int_0^t R_{p_L}(\tau) d\tau + \frac{[1 - \exp(-at)]^2}{a^2} \right\}, \quad (5.126)$$

где

$$R_{p_L}(\tau) = \frac{\overline{v_{p\infty}(t) v_{p\infty}(t + \tau)}}{\overline{v_{p\infty}^2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{y_p^2(t)} = \\ &= \overline{v_{p\infty}^2} [1 - \exp(-at)] \left[\int_0^t R_{p_L}(\tau) d\tau - \frac{1}{a} R_{p_L}(t) + \frac{1}{a} \exp(-at) \right]. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Если это выражение сравнить с формулой для установившегося состояния [см. уравнение (5.36)]

$$(\epsilon_p)_{уст} = \overline{v_{p\infty}^2} \int_0^t R_{p_L}(\tau) d\tau,$$

то можно заметить, что коэффициент диффузии ϵ_p зависит от времени не только из-за ограниченности диффузии пределами масштаба турбулентности при малом времени, но также и благодаря переходному процессу индукции.

Для интенсивности турбулентного движения частицы получим выражение

$$\overline{v_p^2} = \overline{v_{p\infty}^2} [1 - 2 \exp(-at) R_{p_L}(t) + \exp(-2at)]. \quad (5.128)$$

Индукционный период определяется функцией $\exp(-at)$. Если рассматривать твердые частицы в турбулентном потоке воздуха, то для частиц с диаметром 100 мк получим значение $a \approx 10 \text{ сек}^{-1}$. Если принять $\exp(-at) = 0,05$, то индукционный период составит 0,3 сек. Хотя этот период и является довольно непродолжительным, тем не

менее в высокоскоростном потоке частица в течение этого индукционного периода может пройти значительное расстояние.

Когда коэффициент корреляции $R_{f_L}(t) = \exp(-t/\mathcal{J}_{f_L})$, то для $R_{p_L}(t)$ справедливо полученное выше выражение

$$R_{p_L}(t) = \frac{1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \left[a\mathcal{J}_{f_L} \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) - \exp(-at) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{v_p^2} &= \overline{v_{p\infty}^2} \left[1 - \frac{2a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}} - at\right) + \frac{a\mathcal{J}_{f_L} + 1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \exp(-2at) \right] = \\ &= \overline{v_f^2} \frac{a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} + 1} \left[1 - \frac{2a\mathcal{J}_{f_L}}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}} - at\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a\mathcal{J}_{f_L} + 1}{a\mathcal{J}_{f_L} - 1} \exp(-2at) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \overline{v_f^2} \frac{\mathcal{J}_{f_L}}{a^2\mathcal{J}_{f_L}^2 - 1} [1 - \exp(-at)] \times \\ &\quad \times \left\{ a^2\mathcal{J}_{f_L}^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) \right] - [1 - \exp(-at)] + \right. \\ &\quad \left. + a\mathcal{J}_{f_L} \left[\exp(-at) - \exp\left(-\frac{t}{\mathcal{J}_{f_L}}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

§ 5.8. Влияние сжимаемости

Соотношения между диффузией жидких частиц и лагранжевой корреляцией скорости, выведенные в предыдущем параграфе, носят общий характер и не зависят от сжимаемости, хотя диффузия сама по себе, а также корреляции не свободны от ее влияния, так как сжимаемость влияет на движение жидких частиц. Рассмотрим, например, смещение частицы в направлении оси x_2 , начиная с момента времени $t = 0$:

$$y_2(t) = \int_0^t v_2(t') dt' = v_2(0)t + \frac{1}{2!} \left[\frac{dv_2}{dt} \right]_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{d^2v_2}{dt^2} \right]_{t=0} t^3 + \dots;$$

здесь, согласно уравнению движения Навье — Стокса [см. уравнение (1.9) или (1.11)], каждая из величин dv_2/dt , d^2v_2/dt^2 , ... содержит член, отражающий влияние сжимаемости.

Таким образом, скорости диффузии меченых жидких частиц и транспортабельных субстанций зависят от сжимаемости жидкости. Если для описания процесса диффузии ввести коэффициент диффузии, то при этом придется рассматривать то его значение, которое отличается от соответствующей величины для несжимаемой жидкости.

Тогда распространение транспортабельной субстанции будет по-прежнему определяться градиентом осредненной величины и будет происходить в направлении, соответствующем этому градиенту.

Существует, однако, случай, когда распространение тепла может происходить в направлении, противоположном тому, которое определяется градиентом осредненной температуры, т. е. в направлении, совпадающем с этим локальным градиентом, а не в противоположном ему. Этот случай наблюдается при неравномерном распределении осредненного давления и при отклонении распределения осредненной температуры от адиабатического, которое определяется соотношением

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa},$$

откуда, например, следует, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\theta}{p} \frac{dP}{dt},$$

где $\kappa = c_p/c_v$.

Давно известно, что в устойчивой расслоенной атмосфере может наблюдаться перенос тепла, направленный вдоль градиента температуры, от низкой температуры к более высокой [56]. Если распределение температуры по высоте x_2 является политропическим с показателем степени n , то расслоение устойчиво, если $n < \kappa$, так что

$$\frac{d}{dx_2} (\theta_{ад} - \theta_{пол}) > 0.$$

В диапазоне $1 < n < \kappa$ перенос «против» градиента температуры наблюдается в том случае, когда процесс происходит благодаря турбулентности в атмосфере.

Турбулентность вызывает перемешивание верхних слоев атмосферы с нижними, стремясь приблизить распределение температуры к адиабатическому ($n \rightarrow \kappa$). Частицы воздуха, движущиеся под действием турбулентности вверх и вниз, от одного слоя к другому, сжимаются или расширяются по адиабатическому закону. Повышение или понижение температуры из-за адиабатического сжатия или расширения приводит к тому, что частица воздуха имеет более высокую температуру, нежели окружающая ее среда, при движении вниз и более низкую температуру при движении вверх. Вследствие этой разности температур происходит теплообмен с окружающей средой, и чистый эффект выражается в переносе тепла от верхних слоев атмосферы к нижним. Как показал Шульц-Грунов [57], если принять, что

под действием турбулентности вверх и вниз движется одна и та же частица воздуха, то в ней будет происходить циклический термодинамический процесс. На диаграмме этого процесса в координатах давление — объем можно видеть, что воздушная частица поглощает тепло при низком давлении и выделяет его при высоком давлении. Это как раз и есть то, что наблюдается в холодильном процессе.

Такой же процесс теплообмена может происходить в следе за телами в сжимаемом потоке при больших числах Маха [58], когда измеренная температура торможения (например, на поверхности тела) оказывается значительно ниже ожидаемой. Обычные значения коэффициента восстановления, т. е. отношения действительной температуры торможения к температуре адиабатического торможения, в ламинарном пограничном слое близки к величине \sqrt{Pr} , которая для воздуха составляет $\sim 0,85$. Однако в этом случае были измерены значительно более низкие, даже отрицательные, значения.

Одно интересное устройство, которое уже нашло практическое применение, основано на только что описанном явлении. Это — вихревая труба Ранка — Хильша для «сепарации» газа на горячую и холодную фракции [59–61]. По существу, это устройство представляет собой цилиндрическую трубу, один из концов которой закрыт диафрагмой с центральным отверстием; другой конец трубы может быть в большей или меньшей степени прикрыт с помощью дроссельной заслонки. Газ вводится со звуковой или со сверхзвуковой скоростью через тангенциальные сопла на периферии трубы, желательнее в сечении, расположенном ближе к концу трубы с центральным отверстием. Вытекающий через это центральное отверстие газ обладает значительно меньшей температурой торможения, нежели газ, вытекающий в трубу, а температура торможения газа, вытекающего через дроссельную заслонку на другом конце трубы, наоборот, оказывается значительно выше. Отношение расходов фракций и отношение соответствующих температур газов, вытекающих с разных концов трубы, зависят от степени дросселирования на «горячем» конце.

Внутри цилиндрической трубы наблюдается расслоение турбулентного потока газа, статическое давление P в котором уменьшается в радиальном направлении к оси трубы. Радиальное распределение температуры, по-видимому, не является адиабатическим, а турбулентный обмен между газовыми слоями приводит к возникновению потока тепла от внутренних участков к стенке трубы, направленного вдоль градиента температуры.

Объяснение этого эффекта турбулентного обмена в сжимаемом газе с неравномерными распределениями осредненной температуры и осредненного давления может быть основано на теории, изложенной в § 5.4.

Хотя распределение осредненного давления и, возможно, распределение осредненной скорости неравномерны, все же будем считать,

что турбулентное течение достаточно однородно и, следовательно, можно пользоваться соотношением для однородной турбулентности.

Примем вначале равновесное распределение температуры в стационарном состоянии, полученное из уравнения баланса между полным потоком тепла через единицу объема пространства и выделением тепла вследствие сжатия и вязкой диссипации.

Полный поток тепла состоит из двух частей, обусловленных соответственно конвекцией и молекулярной теплопроводностью. Таким образом, полный поток тепла равен

$$\rho U_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} c_v - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right).$$

Выделение тепла вследствие сжатия и вязкой диссипации определяется по работе, совершаемой нормальными напряжениями и напряжениями сдвига при деформации; таким образом, выделение тепла равно

$$\epsilon \sigma_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

где ϵ — коэффициент пропорциональности.

Используя для σ_{ij} выражение (1.8), получаем для выделения тепла следующую формулу:

$$\epsilon \left\{ -P \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \mu \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \Theta \delta_{ij} \right] \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right\}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

имеем

$$-P \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = P \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{1}{\epsilon} (c_p - c_v) \frac{d\Theta}{dt}.$$

Следовательно, уравнение, выражающее баланс тепла, принимает вид

$$\begin{aligned} \rho c_p U_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) = \\ = \epsilon \left[U_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Теперь положим, как и раньше, что

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad U_i = \bar{U}_i + u_i, \quad \Theta = \bar{\Theta} + \theta, \quad P = \bar{P} + p.$$

Если пренебречь влиянием молекулярной теплопроводности и вязкой диссипацией при осредненном движении, то осредненное по времени

уравнение теплового баланса запишется так:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} c_p \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} = & - \bar{\rho} u_i c_p \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} c_p \bar{\theta} u_i + \bar{\rho} \theta c_p \bar{U}_i + c_p \bar{\rho} \theta u_i) + \\ & + \epsilon \left[\bar{U}_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Это уравнение содержит несколько турбулентных членов, порядок величин которых, по всей вероятности, неодинаков. В общем случае можно считать, что величины $\bar{\rho}/\rho$ и \bar{p}/\bar{P} на один порядок ниже, чем величина u_i/\bar{U}_i . Если это предположение правильно, то записанное выше уравнение можно упростить путем пренебрежения членами, содержащими пульсации плотности и давления. Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{\rho} c_p \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} c_p \bar{\theta} u_i) + \\ & + \epsilon \left[\bar{U}_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \quad (5.130) \end{aligned}$$

Тогда турбулентный член $\bar{\theta} u_i = \bar{\Theta} u_i$ определяет перенос тепла турбулентной пульсацией скорости u_i через плоскость, перпендикулярную к оси x_i :

$$\bar{\Theta} u_i = \frac{1}{T} \int_0^T \Theta(t_0) v_i(t_0) dt_0.$$

Теперь предположим, что:

1. Температура $\Theta(t_0)$ жидкой частицы, которая проходит через плоскость x_i в момент времени t_0 , определяется распределениями осредненной температуры и осредненного давления в зоне, через которую она проходит, и в то же время жидкая частица подвергается адиабатическому сжатию или расширению, а также испытывает обмен с окружающей средой, скорость которого прямо пропорциональна разности температур.

2. С одной стороны, масштаб лагранжевой корреляции относительно мал, так что на расстоянии, равном этому масштабу, изменение осредненной температуры и осредненного давления можно аппроксимировать линейными зависимостями.

3. С другой стороны, жидкая частица находится в пути в течение настолько продолжительного времени, что это время можно считать бесконечно большим.

Тогда дифференциальное уравнение для температуры жидкой частицы, выражающее наличие теплового баланса, запишется в виде

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{x-1}{x} \frac{\Theta}{\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dt} + \alpha (\bar{\Theta} - \Theta) + \epsilon \frac{\epsilon}{c_p}. \quad (5.131)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет вклад, приходящийся на долю адиабатического сжатия частицы, когда она испытывает изменение давления $d\bar{P}/dt$. Третий член в правой части представляет вклад вязкой диссипации. В последующем этим членом мы пренебрежем. Однако если этот член удерживать, то единственное отличие конечного результата будет состоять в замене осредненной температуры $\bar{\Theta}$ в выражении (5.132) для $\bar{\Theta}u_i$ на величину $\bar{\Theta} + \epsilon\epsilon/\alpha c_p$.

Обозначим время перемещения через t . Тогда для начального условия $\Theta = \Theta_0$ при $t = 0$ решение нашего дифференциального уравнения запишется следующим образом:

$$\Theta = \alpha \exp(-\alpha t) \int_0^t \bar{\Theta}(t') \left[\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(t')} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} \exp(\alpha t') dt' + \\ + \Theta_0 \left[\frac{\bar{P}(t)}{\bar{P}(0)} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} \exp(-\alpha t).$$

Выражение для температуры жидкой частицы, которая в момент времени t_0 проходит через плоскость x_j , с учетом предположения (3) принимает вид

$$\Theta(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{t_0} \bar{\Theta}(t') \left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} \exp[-\alpha(t_0 - t')] dt'.$$

Но в первом приближении можно положить

$$\bar{\Theta}(t') = \bar{\Theta}(t_0) - \frac{d\bar{\Theta}}{dt'}(t_0 - t') = \bar{\Theta}(x_j) - \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \int_{t'}^{t_0} v_j(t'') dt''$$

и

$$\bar{P}(t') = \bar{P}(x_j) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \int_{t'}^{t_0} v_j(t'') dt''.$$

Кроме того, с той же степенью приближения можем записать

$$\left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} = 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \int_{t'}^{t_0} v_j(t'') dt''.$$

Следовательно,

$$\bar{\Theta}(t') \left[\frac{\bar{P}(t_0)}{\bar{P}(t')} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} = \bar{\Theta}(x_j) - \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \right) \int_{t'}^{t_0} v_j(t'') dt'',$$

откуда

$$\Theta(t_0) = \bar{\Theta}(x_j) - \alpha \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{t_0} \exp[-\alpha(t_0 - t')] dt' \int_{t'}^{t_0} v_j(t'') dt''.$$

Тогда выражение для корреляции $\overline{\Theta u_i}$ получится в таком виде:

$$\overline{\Theta u_i} = -(\epsilon_{\theta}^*)_{ij} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \right), \quad (5.132)$$

где

$$(\epsilon_{\theta}^*)_{ij} = \frac{\alpha}{T} \int_0^T dt_0 \int_{-\infty}^{t_0} \exp[-\alpha(t_0 - t')] dt' \int_{t'}^{t_0} v_i(t_0) v_j(t'') dt''.$$

Пользуясь методом, применявшимся в § 5.4, это выражение можно преобразовать так:

$$(\epsilon_{\theta}^*)_{ij} = \int_0^{\infty} \overline{v_i(t_0) v_j(t_0 + \tau)} \exp(-\alpha\tau) d\tau = \\ = v_i' v_j' \int_0^{\infty} [R_{i,j}(\tau)]_L \exp(-\alpha\tau) d\tau.$$

Полученное выше выражение для $\overline{\Theta u_i}$ показывает, что (1) если распределение осредненной температуры адиабатическое, то чистый перенос тепла отсутствует, и что (2) если распределение осредненной температуры не является адиабатическим, то происходит перенос тепла в направлении градиента температуры при условии, что производные $\partial \bar{\Theta} / \partial x_j$ и $\partial \bar{P} / \partial x_j$ имеют одинаковые знаки, а также

$$\left| \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \right| > \left| \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \right|.$$

Если воспользоваться только что полученным выражением для $\overline{\Theta u_i}$, то тогда уравнение теплового баланса запишется следующим образом:

$$\bar{\rho} c_p \bar{U}_i \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho} c_p (\epsilon_{\theta}^*)_{ij} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \right) = \\ = \epsilon \left[\bar{U}_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \quad (5.133)$$

В этом выражении после проведения свертки по индексам i и j несимметричный тензор вихревой диффузии $(\epsilon_{\theta}^*)_{ij}$ можно заменить симметричным тензором

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\theta})_{ij} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_{\theta}^*)_{ij} + (\epsilon_{\theta}^*)_{ji}] = \\ &= \frac{1}{2} v'_i v'_j \int_0^{\infty} \{[R_{i,j}(\tau)]_L + [R_{j,i}(\tau)]_L\} \exp(-\alpha\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Во многих практических приложениях уравнение (5.133) в своей общей форме не поддается решению. Однако в некоторых особых случаях оно допускает значительные упрощения. Если это уравнение применяется к процессам переноса тепла в вихревой трубе, то принято рассматривать только вращательную компоненту скорости U_{φ} , так как эта компонента значительно больше, чем радиальная и осевая. Кроме того, изменения в радиальном направлении значительно больше, чем в других; вследствие этого можно положить $\bar{U}_i \partial / \partial x_i \approx 0$.

Другое упрощение состоит в предположении, что для расслоенного потока, где перенос происходит в основном в радиальном направлении, можно ввести коэффициент переноса импульса ϵ_m и принять для него постоянное значение. Тогда диссипативный член может быть вычислен по выражению

$$\epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\bar{U}_{\varphi}}{r} \right)^2.$$

Следовательно, уравнение баланса тепла примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho} c_p \epsilon_{\theta} \left(r \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\theta}}{\bar{P}} r \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} \right) + e \epsilon_{m\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{U}_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\bar{U}_{\varphi}}{r} \right)^2 = 0$$

или, поскольку

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = -\frac{\bar{U}_{\varphi}^2}{r}$$

и

$$\frac{\bar{\theta}}{\bar{P}} = \frac{e}{c_p - c_v} = \frac{e\kappa}{c_p(\kappa - 1)},$$

то

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho} c_p \epsilon_{\theta} r \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \frac{e}{c_p} \frac{\bar{U}_{\varphi}^2}{r} \right) + e \epsilon_{m\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{U}_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\bar{U}_{\varphi}}{r} \right)^2 = 0.$$

Радиальное распределение температуры может быть вычислено, если известно распределение $\bar{U}_{\varphi}(r)$.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

- C — концентрация.
 c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.
 D — диаметр трубы; коэффициент молекулярной диффузии.
 d — диаметр цилиндра или стержня.
 E_L — функция лагранжева энергетического спектра.
 e_{ij} — направляющие косинусы.
 F — «движущая сила».
 $F(u_1, u_2)$ — распределение плотности совместной вероятности.
 f — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.
 L — расстояние, на котором транспортабельная субстанция жидкого моля сохраняется постоянной; L_m — для импульса; L_γ — для скалярной величины.
 M — размер ячейки решетки; молекулярный вес.
 n — частота.
 P — статическое давление; \bar{P} — осредненная по времени величина; p — турбулентная пульсация.
 P — вероятность.
 Pr — число Прандтля ν/λ_θ ; $Pr_{турб} = \epsilon_m/\epsilon_\theta$.
 Q — распределение плотности вероятности.
 q^2 — $u_i u_i$ — удвоенная кинетическая энергия турбулентности.
 R_{ij} — коэффициент тензора пространственной корреляции скорости второго ранга.
 $(R_{ij})_L$ — коэффициент тензора лагранжевой корреляции скорости второго ранга.
 R_L — коэффициент лагранжевой временной корреляции.
 Re — число Рейнольдса; $Re_\lambda = u' \lambda_g / \nu$; $Re_M = \bar{U}_1 M / \nu$; $Re_{\Lambda_f} = u' \Lambda_f / \nu$.
 r — расстояние между двумя точками.
 S — интенсивность точечного источника.
 S^* — интенсивность линейного источника на единицу длины.
 t — время.
 U_i — эйлерова скорость; \bar{U}_i — осредненная по времени величина; u_i — компонента турбулентной пульсации; $u'_i = \sqrt{u_i^2}$.
 v_i — лагранжева турбулентная пульсация скорости.
 x_i — эйлеровы координаты.
 y_i — лагранжевы координаты жидкой частицы.
 α — коэффициент обмена.
 β — $2\pi n/\alpha$.
 δ_{ij} — символ Кронекера.

- ε_{ijk} — антисимметричный единичный тензор.
- ϵ — коэффициент вихревой диффузии; ϵ_m — для импульса; ϵ_ω — для завихренности; ϵ_γ — для скалярной субстанции; ϵ_q — для кинетической энергии турбулентности; ϵ_θ — для тепла.
- ϵ_{ij} — коэффициент тензора вихревой диффузии.
- e — коэффициент пропорциональности.
- ε — диссипация на единицу массы под действием турбулентности.
- η — $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$.
- η_i — лагранжево расстояние, проходимое жидкой частицей.
- Γ — скалярная субстанция; $\bar{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; γ — турбулентная пульсация.
- Γ — гамма-функция.
- \mathcal{J}_L — лагранжев интегральный временной масштаб.
- $(\mathcal{J}_{i,j})_L$ — тензор лагранжева интегрального временного масштаба.
- \mathfrak{Z} — поток через единицу площади; $\mathfrak{Z}_\mathcal{P}$ — для транспортабельной субстанции; \mathfrak{Z}_m — для импульса; \mathfrak{Z}_γ — для скалярной субстанции.
- κ — c_p/c_v , отношение удельных теплоемкостей.
- \mathbf{K} — коэффициент теплопроводности.
- \mathfrak{k}_θ — $\mathbf{K}/c_p\rho$; \mathfrak{k}_c, D — коэффициент молекулярной диффузии.
- Λ_L — лагранжев интегральный масштаб $\nu' \mathcal{J}_L$.
- λ_g — пространственный поперечный микромасштаб.
- λ — коэффициент трения о стенку при течении в трубе.
- \mathcal{L} — коэффициент в уравнении «диффузии» Рейхардта; \mathcal{L}_γ — для скалярной субстанции.
- l — путь смешения Прандтля; l_m — для импульса; l_γ — для скалярной субстанции.
- μ — динамический коэффициент вязкости.
- ν — кинематический коэффициент вязкости.
- Ω_k — завихренность; $\bar{\Omega}_k$ — осредненная по времени величина; ω_k — турбулентная пульсация.
- ω — угловая частота.
- \mathcal{P} — транспортабельная субстанция; $\bar{\mathcal{P}}$ — осредненная по времени величина.
- π — 3,14159...
- \mathfrak{R} — газовая постоянная.
- ρ — плотность.
- σ_{ij} — тензор напряжений.
- τ — время.

τ_E — эйлеров временной микромасштаб.

τ_L — лагранжев временной микромасштаб.

Θ — дилатация.

Θ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина;
 θ — турбулентная пульсация.

\mathcal{V} — скорость крупномасштабных турбулентных движений.

ξ_i — эйлеровы координаты.

ζ — скорость деформации $\overline{e_{ii}e_{lj} \partial u_i / \partial x_j}$ при $t \rightarrow \infty$.

ГЛАВА 6

НЕИЗОТРОПНАЯ СВОБОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 6.1. Введение

Свободная турбулентность наблюдается в таком потоке, где отсутствует непосредственное влияние каких-либо твердых границ на турбулентность потока. При этом допускается косвенное влияние, поскольку твердые границы могут порождать условия существования свободной турбулентности; например, препятствие, помещенное в потоке, может создать такую картину течения, при которой наблюдается свободная турбулентность.

В неизотропном потоке имеются отличные от нуля осредненные по времени величины напряжений сдвига; эти напряжения и создают турбулентные движения (см., например, § 4.2). Таким образом, в отличие от изотропной турбулентности, при которой турбулентные движения вследствие вязкой диссипации носят вырождающийся характер, в неизотропном турбулентном потоке существует как порождение, так и диссипация турбулентности.

Поток, обладающий отличными от нуля осредненными по времени напряжениями сдвига, идентичен потоку с осредненными по времени градиентами скорости. Значит, можно сказать, что неизотропная турбулентность наблюдается в таком потоке, целые области которого отличаются друг от друга по осредненной скорости обычно весьма существенно.

При изучении подобных турбулентных течений из практических соображений желательно ограничиться вначале наиболее простыми, элементарными видами течения. Эти элементарные виды течения можно разделить на две основные группы: (1) свободные струи и (2) течения в следе за препятствиями.

Дальнейшее разделение можно провести между двумерными, или плоскими, и осесимметричными осредненными потоками.

К настоящему времени выполнены теоретические и экспериментальные исследования следующих видов течения: течения на границе между двумя параллельными потоками с различными значениями

осредненной скорости (часто называемого полуструей); плоской и осесимметричной струи; плоского следа за цилиндрическим стержнем; осесимметричного следа за сферой; плоского следа непосредственно позади ряда цилиндрических стержней.

В перечисленных видах течения оказывается возможным выделить одно основное направление потока, скорость в котором значительно больше, нежели в каком-либо другом. Этот факт имеет очень важное значение, ибо позволяет существенно упростить теоретическое исследование этих течений. Указанные упрощения основаны на следующих предположениях:

1. Скорость осредненного течения в направлении, перпендикулярном к основному потоку, очень мала по сравнению со скоростью основного потока, и в некоторых случаях ею даже можно пренебречь.

2. Изменения различных параметров в направлении основного потока происходят очень медленно по сравнению с изменениями в поперечном направлении. Это предположение согласуется с тем фактом, что область свободного турбулентного течения в направлении основного потока обладает значительно большей протяженностью, нежели в поперечном направлении.

3. Изменение осредненного давления по области течения в поперечном направлении очень мало; в направлении основного потока давление изменяется, по существу, в соответствии с распределением давления в невозмущенном потоке. Распределение давления в направлении основного потока обычно является равномерным; поэтому можно принять допущение о том, что осредненное давление постоянно по всей области турбулентного течения.

В главе 4 уже говорилось о незавершенности теорий турбулентного течения со сдвигом. Пока еще не создано какой-либо статистической теории, эквивалентной теории изотропной турбулентности, которая дала бы возможность проанализировать турбулентное течение с поперечным сдвигом и найти, скажем, распределение скорости; в связи с этим наши знания о деталях механизма турбулентного течения, основанные на экспериментальных фактах, очень полезны для понимания этого механизма и интерпретации опытных данных.

Различные теории, разработанные применительно к свободным турбулентным потокам и постепенно ставшие более или менее классическими, носят чисто феноменологический характер. Мы рассматривали эти теории в главе 5; среди них отметим теории, основанные на предположении о том, что распределение скорости (или температуры, или концентрации) может быть вычислено с помощью соответствующим образом выбранных коэффициентов вихревой диффузии (теория Буссинеска и теории пути смешения), а также индуктивную теорию свободной турбулентности, выдвинутую Рейхардтом. Поскольку эти теории являются пока единственными, хотя и не очень удовлетворительными теориями, которыми мы можем воспользоваться

для расчета распределения осредненных параметров свободных турбулентных потоков, нам придется в дальнейшем изложении ссылаться только на них.

При использовании этих феноменологических теорий применительно к свободным турбулентным потокам широкое распространение получило предположение о подобии, или, лучше сказать, об автомодельности в том смысле, как это определено во введении к главе 3. Если говорить более строго, то понятие автомодельности используется здесь для выражения того факта, что турбулентность сохраняет свою структуру при распространении турбулентной области в направлении вниз по потоку.

В настоящее время накоплено уже достаточно экспериментальных данных о подобии профилей осредненной скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи и следа в направлении вниз по потоку. Для каждого из частных случаев свободных турбулентных потоков получаются колоколообразные кривые, которые оказываются геометрически подобными, если значения скорости в каком-либо сечении представлять в безразмерном виде, используя для этой цели в качестве масштаба скорости максимальную разность осредненных скоростей, а поперечные координаты относить к своему масштабу, равному местной ширине турбулентной области, или лучше, в случае симметричных профилей осредненной скорости, — к так называемой «полуширине». Это — такое расстояние от оси симметрии, на котором осредненная скорость составляет половину максимальной разности осредненных скоростей. Указанные масштабы скорости и длины зависят только от расстояния до некоторого фиктивного источника, из которого как бы берет начало свободный турбулентный поток (струя или след).

Это подобие картин течения в различных поперечных сечениях и автомодельность турбулентной структуры, движущейся вниз по течению вместе с основным потоком, следуют из того эмпирического факта, что области свободного турбулентного течения являются относительно узкими, а скорость основного течения значительно больше скорости в поперечном направлении, тогда как пространственные изменения в направлении основного потока намного меньше соответствующих изменений в поперечном направлении. Отсюда следует, что картина развития турбулентного течения вниз по потоку в сильной степени зависит от истории его возникновения. Этот вывод особенно справедлив для случая следа и струи в спутном равномерном потоке, скорость которого велика по сравнению с разностью между абсолютной скоростью струи и скоростью спутного потока.

Если бы порождения турбулентности осредненными напряжениями сдвига не происходило, то турбулентность в направлении вниз по потоку вырождалась бы, а автомодельность сохранялась бы в основ-

ной части диапазона волновых чисел, точно так же, как это происходит в вырождающейся изотропной турбулентности. Однако в свободном турбулентном потоке с поперечным сдвигом наблюдается порождение турбулентности. Но это порождение определяется градиентом распределения осредненной скорости, который, в свою очередь, зависит от турбулентности, возникшей выше по потоку и перенесенной вниз по нему благодаря турбулентной диффузии и конвекции. Эта тесная связь турбулентности и распределения осредненной скорости в некотором сечении и в сечениях, расположенных выше по потоку, позволяет ожидать подобия полной картины течения несмотря на то, что турбулентность непрерывно порождается основным движением через посредство турбулентных напряжений сдвига.

Ниже мы не будем останавливаться на всех исследованиях свободных турбулентных потоков. Мы ограничимся рассмотрением двух специальных случаев: (1) следа за цилиндром, который представляет собой группу течений в следе, и (2) круглой свободной струи, представляющей группу струйных течений. Этими двумя случаями представлены также соответственно как плоское, так и осесимметричное течения. Оба этих случая исследованы наиболее полно.

§ 6.2. Приближенные предположения, используемые для упрощения уравнений движения

Прежде чем анализировать два особых случая свободных турбулентных течений, упомянутых в предыдущем параграфе, полезно рассмотреть в более общей постановке те приближенные предположения, которые могут быть использованы для преобразований уравнений движения и которые совместны с эмпирическим фактом, состоящим в том, что свободные турбулентные зоны являются относительно узкими.

Осредненное движение мы будем полагать стационарным, а числа Рейнольдса будем считать настолько большими, что молекулярными эффектами по сравнению с турбулентными можно пренебречь.

Будем считать, что ось x_1 системы координат и соответствующая скорость \bar{U}_1 совпадают с направлением основного течения, т. е. с направлением, в котором скорость существенно больше, чем в других.

Введем для осей x_1 , x_2 и x_3 соответственно масштабы длины L_1 , L_2 и L_3 . Поскольку турбулентная зона в направлениях осей x_2 и x_3 по сравнению с направлением оси x_1 является узкой, масштабы длины выбираются так, чтобы

$$\frac{L_2}{L_1} \ll 1, \quad \frac{L_3}{L_1} \ll 1, \quad \frac{L_2}{L_3} \sim 1. \quad (6.1)$$

Пусть u_1 — подходящий масштаб для скорости осредненного течения \bar{U}_1 ; в качестве его удобно выбрать, например, максимальную разность скоростей в поперечном сечении, перпендикулярном к направлению осредненного течения.

Величины масштабов скорости u_2 и u_3 для компонент скорости \bar{U}_2 и \bar{U}_3 зависят от масштаба скорости u_1 , потому что изменения скорости в различных направлениях, как это следует из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{u_1}{L_1} \quad \frac{u_2}{L_2} \quad \frac{u_3}{L_3}$$

не являются независимыми. Под отдельными слагаемыми уравнения неразрывности записаны порядки этих членов; они должны быть одинаковы. Отсюда

$$\frac{u_1}{L_1} \sim \frac{u_2}{L_2} \sim \frac{u_3}{L_3},$$

или

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{L_2}{L_1}, \quad \frac{u_3}{u_1} = \frac{L_3}{L_1}, \quad \frac{u_2}{u_3} \sim 1. \quad (6.2)$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{L_2}{L_1}, \quad \frac{\bar{U}_3}{\bar{U}_1} = \frac{L_3}{L_1}, \quad \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_3} \sim 1.$$

Уравнения движения Рейнольдса содержат турбулентные рейнольдсовы напряжения $\overline{\rho u_i u_j}$, для которых тоже необходимо ввести подходящий масштаб. Из опыта известно, что в анизотропных потоках с поперечным сдвигом интенсивности \bar{u}_1^2 , \bar{u}_2^2 и \bar{u}_3^2 одинаковы по порядку величины. Следовательно, для u'_1 , u'_2 и u'_3 можно ввести один и тот же масштаб v . Величины напряжений сдвига $\overline{\rho u_i u_j}$ при $i \neq j$ по сравнению с $\overline{\rho u_1^2}$, $\overline{\rho u_2^2}$ и $\overline{\rho u_3^2}$ зависят от величины коэффициентов корреляции R_{ij} при $i \neq j$. Следовательно, можно положить, что

$$\bar{u}_1^2 \sim \bar{u}_2^2 \sim \bar{u}_3^2 \sim v^2$$

и

$$\overline{u_i u_j} \sim R_{ij} v^2 \quad \text{для } i \neq j. \quad (6.3)$$

Целесообразно отдельно рассмотреть два различных случая течения этого типа.

1. Имеется постоянная скорость U_0 , наложенная на скорость осредненного течения \bar{U}_1 , причем $U_0/\bar{U}_1 \gg 1$.

Мы увидим далее, что порядок величины этого отношения не является независимым от порядка величины L_1/L_2 .

Этот случай встречается при течении в следе и в свободной струе в спутном потоке, обладающем постоянной скоростью U_0 , большой по сравнению с относительной скоростью истечения струи.

2. Наложённая скорость U_0 отсутствует или, в противном случае, имеет такой же порядок величины, как и \bar{U}_1 . Это соответствует случаю свободной струи, вытекающей в неподвижную или движущуюся с малой скоростью окружающую среду.

Рассмотрим вначале уравнение движения Рейнольдса для случая 1. Ввиду того, что при сравнении явлений, происходящих в различных направлениях, существенной разницы между направлениями осей x_2 и x_3 не наблюдается, достаточно рассмотреть только уравнение для осей x_1 и x_2 . Любой вывод, полученный в отношении оси x_2 , справедлив также и для оси x_3 .

Выпишем уравнение движения и под каждым членом поставим относительный порядок его величины по сравнению с другими членами, выраженный через масштабы скорости и длины.

Для оси x_1 получим

$$(U_0 + \bar{U}_1) \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3} \quad (6.4)$$

$$\frac{U_0}{\bar{U}_1} \frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{u_1^2}{L_1} \quad \frac{\Delta P_1}{\rho L_1} \quad \frac{v^2}{L_1} \quad R_{12} \frac{v^2}{L_2} \quad R_{13} \frac{v^2}{L_3}$$

или

$$\frac{U_0}{U_1} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_1}{\rho u_1^2} \quad \frac{v^2}{u_1^2} \quad R_{12} \frac{v^2 L_1}{u_1^2 L_2} \quad R_{13} \frac{v^2 L_1}{u_1^2 L_3}$$

Под величиной ΔP_1 подразумевается изменение давления в направлении оси x_1 . Можно заметить, что величины $\bar{U}_2 \partial \bar{U}_1 / \partial x_2$ и $\bar{U}_3 \partial \bar{U}_1 / \partial x_3$ имеют такой же порядок, как и $\bar{U}_1 \partial \bar{U}_1 / \partial x_1$. Это можно показать следующим образом: величина $\bar{U}_2 \partial \bar{U}_1 / \partial x_2$ имеет порядок $u_2 u_1 / L_2 \sim \sim u_1^2 / L_1$, так как $u_2 = u_1 L_2 / L_1$.

Аналогичный результат получается и для члена $\bar{U}_3 \partial \bar{U}_1 / \partial x_3$.

Для уравнения движения в проекции на ось x_2 получим

$$(U_0 + \bar{U}_1) \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_2 u_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} \quad (6.5)$$

$$\frac{U_0}{\bar{U}_1} \frac{u_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{u_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{u_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{\Delta P_2}{\rho L_2} \quad R_{12} \frac{v^2}{L_1} \quad \frac{v^2}{L_2} \quad R_{23} \frac{v^2}{L_3}$$

или

$$\frac{U_0}{\bar{U}_1} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\Delta P_2}{\rho u_1^2} \quad R_{12} \frac{v^2 L_1}{u_1^2 L_2} \quad \frac{v^2 L_1^2}{u_1^2 L_2^2} \quad R_{23} \frac{v^2}{u_1^2} \frac{L_1^2}{L_2 L_3}$$

На основании предположения о том, что $U_0/\bar{U}_1 \gg 1$ (случай 1), второй и третий члены в левой части уравнений (6.4) и (6.5) оказываются на порядок меньше. Если предположить, что коэффициенты корреляции R_{12} , R_{13} и R_{23} не являются малыми, то производная $\partial \bar{u}_1^2 / \partial x_1$ в уравнении (6.4) мала по сравнению с $\partial \overline{u_1 u_2} / \partial x_2$ и $\partial \overline{u_1 u_3} / \partial x_3$, а производная $\partial \overline{u_2 u_1} / \partial x_1$ в уравнении (6.5) мала по сравнению с другими турбулентными членами.

Так как в большинстве случаев величина v^2/\mathcal{U}_1^2 может быть порядка 1, то из уравнения (6.4) следует, что величина U_0/\bar{U}_1 не может быть по порядку больше, нежели L_1/L_2 ; в противном случае все турбулентные члены должны были бы быть малы по сравнению с первым членом в левой части уравнения (6.4). Другими словами, величина U_0/\bar{U}_1 должна иметь тот же порядок, что и L_1/L_2 . Но если это так, то первый член в левой части уравнения (6.5) также остается малым по сравнению с турбулентными членами $\partial \bar{u}_2^2 / \partial x_2$ и $\partial \overline{u_2 u_3} / \partial x_3$. Отсюда следует, что единственным членом, который может уравновесить эти турбулентные члены, является слагаемое, содержащее давление $\partial \bar{P} / \rho \partial x_2$. Следовательно, отношение $\Delta P_2 / \rho \mathcal{U}_1^2$ по порядку величины одинаково с v^2/\mathcal{U}_1^2 .

Таким образом, если в уравнении движения (6.5) сохранить только члены, имеющие наибольший порядок величины, то оно упростится следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{u}_2^2 + \rho \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} = 0, \quad (6.6)$$

или, после интегрирования,

$$\bar{P} + \rho \bar{u}_2^2 + \rho \int \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} dx_2 = P_0, \quad (6.6a)$$

где P_0 — давление в том же поперечном сечении, но снаружи турбулентной зоны.

Из уравнения (6.6a) получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_2^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} dx_2. \quad (6.7)$$

Но так как скорость снаружи турбулентной зоны равна постоянной величине U_0 , то градиент давления $dP_0/dx_1 = 0$.

Можно заметить, далее, что турбулентные члены имеют тот же порядок, что и турбулентный член $\partial \bar{u}_1^2 / \partial x_1$ в уравнении (6.4). Следовательно, если в этом уравнении также удерживать только члены наивысшего порядка, то после упрощения уравнения (6.4) получим

$$U_0 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3}. \quad (6.8)$$

Это уравнение может быть решено, если известны функции $\overline{u_1 u_2}$ и $\overline{u_1 u_3}$ или их связь с распределением скорости $\overline{U_1}$. Тогда из уравнения (6.7) можно вычислить распределение давления.

Турбулентные члены могут быть выражены через распределение скорости $\overline{U_1}$ путем введения тензора вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{il}$, если предположить, что перенос импульса обусловлен диффузией градиентного типа:

$$-\overline{u_i u_j} = (\epsilon_m)_{il} \left(\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_l} \right).$$

В этом выражении все производные от скорости малы, за исключением $\partial \overline{U}_1 / \partial x_2$ и $\partial \overline{U}_1 / \partial x_3$. Отсюда, если считать, что все компоненты тензора $(\epsilon_m)_{il}$ одинаковы по порядку величины, уравнение (6.8) принимает вид *)

$$U_0 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3} \right]. \quad (6.9)$$

Это уравнение, если компоненту $(\epsilon_m)_{11}$ тензора вихревой диффузии считать постоянной, приводит к решению типа кривой Гаусса.

Если течение является плоским, так что скорость \overline{U}_1 зависит только от x_1 и x_2 , то при использовании теории пути смещения Прандтля можно получить другое решение. В этом случае наше уравнение имеет вид

$$U_0 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} = \epsilon_m^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right)^2. \quad (6.10)$$

Решение этого уравнения для следа за круглым цилиндром будет дано в следующем параграфе.

Во втором рассматриваемом случае мы не будем вводить в уравнение движения возможную наложенную постоянную скорость U_0 , поскольку предполагается, что эта скорость, если она и существует, мала или имеет такой же порядок, как и \overline{U}_1 , и, следовательно, не

*) Если коэффициент вихревой диффузии выразить не через тензор второго ранга, а через тензор четвертого ранга, то получим

$$-\overline{u_1 u_2} = [(\epsilon_m)_{1212} + (\epsilon_m)_{1221}] \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + [(\epsilon_m)_{1213} + (\epsilon_m)_{1231}] \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3},$$

$$-\overline{u_1 u_3} = [(\epsilon_m)_{1312} + (\epsilon_m)_{1321}] \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + [(\epsilon_m)_{1313} + (\epsilon_m)_{1331}] \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3}.$$

Эти соотношения в том случае, когда осредненное течение является плоским, приводят к тому же результату, что и уравнение (6.9).

влияет на анализ порядков величин:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3}. \quad (6.11)$$

$$\frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1} \quad \frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1} \quad \frac{\mathcal{U}_1^2}{L_1} \quad \frac{\Delta P_1}{\rho L_1} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{L_1} \quad R_{12} \frac{\mathfrak{v}^2}{L_2} \quad R_{13} \frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_1}{\rho \mathcal{U}_1^2} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \quad R_{12} \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1}{L_2} \quad R_{13} \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1}{L_3}$$

Из анализа этого уравнения сразу можно заключить, что отношение $\mathfrak{v}^2/\mathcal{U}_1^2$ в большинстве случаев может быть величиной порядка L_2/L_1 , т. е. на один порядок меньше, чем в предыдущем случае.

Второе уравнение движения описывается следующим выражением:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_2 u_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3}. \quad (6.12)$$

$$\frac{\mathcal{U}_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{\mathcal{U}_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{\mathcal{U}_1^2 L_2}{L_1^2} \quad \frac{\Delta P_2}{\rho L_2} \quad R_{12} \frac{\mathfrak{v}^2}{L_1} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{L_2} \quad R_{23} \frac{\mathfrak{v}^2}{L_3}$$

или

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_2}{\rho \mathcal{U}_1^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \quad R_{12} \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1}{L_2} \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \quad R_{23} \frac{\mathfrak{v}^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1^2}{L_3^2}$$

Поскольку, согласно уравнению (6.11), отношение \mathfrak{v}^2/U_1^2 по порядку величины одинаково с L_2/L_1 , то турбулентные члены $\partial \overline{u_2^2}/\partial x_2$ и $\partial \overline{u_2 u_3}/\partial x_3$ в уравнении (6.12) должны быть велики по сравнению с членами, содержащими скорость, в левой части уравнения, а член, содержащий давление $\Delta P_2/\rho \mathcal{U}_1^2$, должен быть величиной того же порядка.

Таким образом, уравнение (6.12) сводится к уравнению (6.6), а (6.11) — к уравнению

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3}. \quad (6.13) \end{aligned}$$

Здесь мы опять-таки можем воспользоваться предположением о том, что перенос импульса связан с диффузией градиентного типа, и ввести тензор вихревой диффузии. Тогда это уравнение станет

подобным уравнению (6.9) и запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = & - \frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В случае двумерного течения решения этого уравнения могут быть получены при

$$(\epsilon_m)_{11} = \text{const}$$

и при

$$(\epsilon_m)_{11} = \epsilon_m^2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Это относится и к течению, симметричному относительно оси z , вдоль которой направлен осредненный поток. В этом случае уравнение для компоненты \bar{U}_z скорости осредненного течения имеет вид

$$\bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\epsilon_m)_{zz} r \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} \right], \quad (6.15)$$

а распределение давления поперек зоны турбулентного течения отыскивается из соотношения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{u_r^2} + \frac{\overline{u_r^2} - \overline{u_\varphi^2}}{r} = 0 \quad (6.16)$$

или, после интегрирования,

$$\bar{P} + \rho \overline{u_r^2} + \rho \int \frac{\overline{u_r^2} - \overline{u_\varphi^2}}{r} dr = P_0. \quad (6.16a)$$

Наконец, заметим, что величины различных членов в уравнениях (6.11) и (6.12) отличаются друг от друга, самое большее, на один порядок. Следовательно, если приближенные предположения, принятые при выводе уравнения (6.13), окажутся слишком грубыми, то в качестве следующего возможного шага придется рассматривать полное уравнение (6.11). Так как при этом в уравнении (6.11) удерживается турбулентный член $\partial \overline{u^2} / \partial x_1$, то пренебрегать турбулентными членами в соотношении (6.7) уже нельзя. Следовательно, в этом случае вместо уравнения (6.13) получим уравнение

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \bar{U}_3 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_3} = & - \frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx_1} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\overline{u_1^2} - \overline{u_2^2} - \int \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_2 u_3} dx_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{u_1 u_3}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

§ 6.3. Распределение скорости в следе за цилиндром по классическим теориям

В этом параграфе мы рассмотрим распределения осредненной скорости, полученные в соответствии с классическими теориями Буссинеска, Прандтля и Тэйлора. В этих теориях используется предположение о подобии между профилями скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях, находящихся вне определенного расстояния от цилиндра.

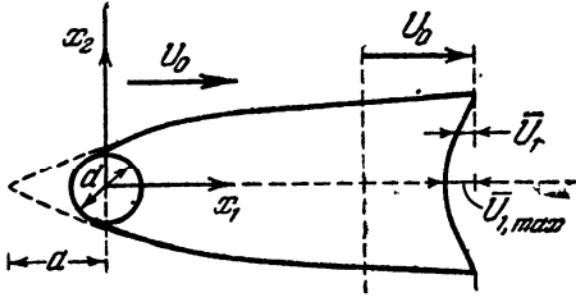


Рис. 6.1. Схема течения в следе за цилиндром.

Обозначим через U_0 скорость невозмущенного набегающего потока.

Начало системы координат поместим в центр цилиндра, а ось x_1 совместим с направлением скорости невозмущенного потока U_0 ; ось x_2 считается перпендикулярной к оси цилиндра (см. рис. 6.1).

Обозначим отклонение скорости от величины U_0 , вызванное наличием цилиндра, через U_1 , а через \bar{U}_1 — его осредненное значение.

В рамках предположений, перечисленных в предыдущем параграфе, уравнение движения в проекции на ось x_1 запишется в виде

$$\rho U_0 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\bar{U}_1}{U_0} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2}. \quad (6.18)$$

На основании предположения о подобии потока в последовательно расположенных поперечных сечениях можно положить

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = f(\xi_2), \quad \frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_0} = \psi(\xi_1), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = h(\xi_2), \quad (6.19)$$

где

$$\xi_2 = \frac{x_2}{d} \varphi(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{x_1 + a}{d}, \quad (6.20)$$

a — расстояние между геометрическим источником подобия и началом системы координат; d — диаметр цилиндра.

Из соотношений (6.19) получаем

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = \psi(\xi_1) f(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = \psi^2(\xi_1) h(\xi_2). \quad (6.21)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\bar{U}_1}{U_0} = \frac{1}{d} f \frac{d\psi}{d\xi_1} + \frac{1}{d} \psi \xi_2 \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \frac{df}{d\xi_2}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = \frac{1}{d} \psi^2 \varphi \frac{dh}{d\xi_2},$$

уравнение (6.18) принимает вид

$$f \frac{d\psi}{d\xi_1} + \psi \xi_2 \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \frac{df}{d\xi_2} = \psi^2 \varphi \frac{dh}{d\xi_2}. \quad (6.22)$$

Следовательно, функции $\psi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_1)$ не являются независимыми. До сих пор мы рассматривали только дифференциальные уравнения и не вводили граничных или начальных условий. Поскольку $\sigma_{12} = 0$ при $x_2 = +\infty$ и при $x_2 = -\infty$, интегрирование уравнения (6.18) по x_2 дает

$$\frac{d}{dx_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{U}_1}{U_0} dx_2 = \left. \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{U}_1}{U_0} dx_2 = \text{const.}$$

Эта постоянная величина, по-видимому, непосредственно связана с сопротивлением цилиндра. Это следует из рассмотрения баланса потока импульса для течения около цилиндра.

Для определения этого баланса выделим на больших расстояниях от цилиндра несколько контрольных плоскостей (см. рис. 6.2). Через пару плоскостей I имеется поток импульса в направлении оси x_1 :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho [U_0^2 - \overline{(U_0 - U_1)^2}] dx_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho (2U_0 \bar{U}_1 - \bar{U}_1^2) dx_2 \approx \\ &\approx 2\rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}_1 dx_2. \end{aligned}$$

Между контрольными плоскостями I происходит изменение расхода на величину $\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}_1 dx_2$. Это изменение уравнивается втеканием

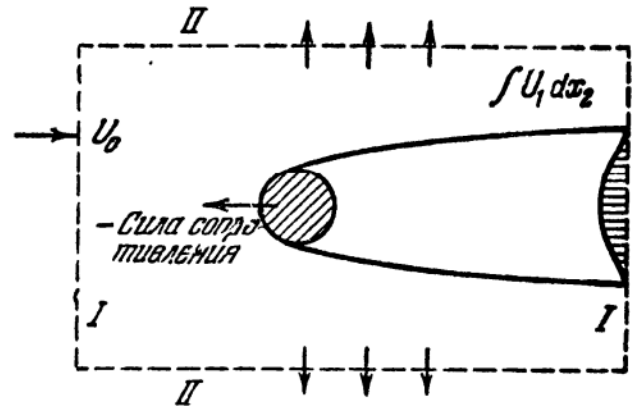


Рис. 6.2. Контрольные поверхности, используемые при составлении баланса потока импульса.

равного количества жидкости через пару контрольных плоскостей II , вызывающим потерю потока импульса в направлении оси x_1 :

$$-\rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}_1 dx_2.$$

Сумма этих потоков импульса должна быть равна сопротивлению цилиндра.

Отсюда, поскольку на достаточно больших расстояниях

$$\frac{\bar{U}_1^2}{\bar{U}_1 U_0} \ll 1,$$

$$\frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{U}_1}{U_0} dx_2.$$

Таким образом, с помощью соотношений (6.21) и (6.20) получаем

$$\frac{\psi}{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_2) d\xi_2 = \frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \text{const},$$

откуда

$$\psi(\xi_1) = A\varphi(\xi_1). \quad (6.23)$$

Из соотношений (6.22) и (6.23) имеем

$$\frac{f}{dh/d\xi_2} + \frac{\xi_2 df/d\xi_2}{dh/d\xi_2} = A \frac{\varphi^3}{d\varphi/d\xi_1}. \quad (6.24)$$

В этом уравнении левая часть зависит только от ξ_2 , а правая часть — только от ξ_1 . Следовательно, обе части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине. Таким образом, получаем соотношение

$$\varphi^3 = \text{const} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi_1},$$

которое удовлетворяется, если

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\xi_1}}.$$

С помощью этого соотношения для φ выражение для ξ_2 можно преобразовать к виду

$$\xi_2 = \frac{x_2}{d} \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} = \frac{x_2}{\sqrt{d(x_1 + a)}}. \quad (6.25)$$

Тогда выражения (6.21) запишутся так [см. также уравнение (6.23)]:

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = A \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} f(\xi_2), \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = A^2 \frac{d}{x_1 + a} h(\xi_2). \quad (6.26)$$

С учетом известных теперь функциональных зависимостей для ξ_2 , φ и ψ можно решить уравнение движения (6.22), получив при этом соотношение между f и h или между распределением осредненной скорости и распределением напряжения сдвига. При этом из уравнения (6.24) имеем

$$f + \xi_2 \frac{df}{d\xi_2} = -2A \frac{dh}{d\xi_2}.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$h = -\frac{1}{2A} \xi_2 f.$$

Постоянная интегрирования здесь обращается в нуль, так как напряжение сдвига при $\xi_2 = 0$ из условий симметрии тоже обращается в нуль.

Распределение напряжения сдвига, будучи выраженным через распределение скорости, запишется в виде

$$\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} \xi_2 \frac{\bar{U}_1}{U_0} = -\frac{1}{2} \frac{x_2}{x_1 + a} \frac{\bar{U}_1}{U_0}. \quad (6.27)$$

Из этого выражения получается компонента $(\epsilon_m)_{11}$ вихревой диффузии, которая имеет вид

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_2 \bar{U}_1 / U_0}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / U_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_2 \bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max}}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max})}. \quad (6.28)$$

Это соотношение показывает, что коэффициент вихревой диффузии не зависит от x_1 , а является функцией только ξ_2 .

Интегрирование уравнения (6.28) приводит к зависимости

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp \left[-\frac{U_0 d}{2} \int_0^{\xi_2} \frac{\xi_2 d\xi_2}{(\epsilon_m)_{11}} \right]. \quad (6.29)$$

Если воспользоваться каким-либо предположением относительно величины $(\epsilon_m)_{11}$, то можно вычислить интеграл в уравнении (6.29) и получить распределение скорости. Примем сначала наиболее простое предположение, а именно будем считать эту величину постоянной. Тогда после взятия интеграла в формуле (6.29) получаем следующее выражение:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp \left[-\frac{U_0 d}{4 (\epsilon_m)_{11}} \xi_2^2 \right]. \quad (6.29a)$$

Теории пути смешения

В теориях пути смешения можно воспользоваться либо гипотезой Прандтля о том, что транспортабельной субстанцией, которая подлежит рассмотрению, является импульс, либо гипотезой Тэйлора о том, что транспортабельной субстанцией является завихренность. Но в главе 5 было показано, что при двумерном течении обе гипотезы приводят к одинаковому результату, если путь смешения для переноса завихренности l_ω взять в $\sqrt{2}$ раз больше пути смешения для переноса импульса.

Предположим здесь, что транспортабельной субстанцией является импульс. Согласно теории пути смешения, в этом случае имеем [см. уравнение (5.8)]

$$(\epsilon_m) = l_m^2 \left| \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \right|,$$

откуда

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d} = \frac{A l_m^2}{d(x_1 + a)} \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right|.$$

Так как величина $(\epsilon_m)_{11}$ не зависит от x_1 , а путь смешения l_m считается функцией только x_1 , то отсюда следует, что

$$l_m = c_m \sqrt{d(x_1 + a)}.$$

Подставляя последнее выражение для $(\epsilon_m)_{11}/U_0 d$ в уравнение (6.28), получаем дифференциальное уравнение для $\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max}$, которое легко интегрируется. Результат интегрирования записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18c_m^2 A} \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2,$$

где $(\xi_2)_0$ — такое значение ξ_2 , при котором скорость \bar{U}_1 обращается в нуль. Таким образом, это решение дает для ширины следа конечную величину.

Так как $\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max} = 1$ при $\xi_2 = 0$, то величины $(\xi_2)_0$, A и c_m должны удовлетворять соотношению

$$(\xi_2)_0^3 = 18c_m^2 A.$$

Таким образом, окончательное выражение для распределения скорости принимает вид

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2. \quad (6.30)$$

Для распределения скорости $\bar{U}_{1, \max}$ вдоль оси получаем

$$\frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_0} = A \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18c_m^2} \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}}. \quad (6.31)$$

Значение $(\xi_2)_0$, в принципе, можно определить по экспериментальным профилям скорости, а именно по тем точкам, где $\bar{U}_1 = 0$. Величину c_m можно найти по распределению скорости в осевом направлении путем совмещения теоретического и экспериментального распределений скорости вдоль оси следа. Величину c_m можно также определить, зная сопротивление цилиндра, так как

$$\frac{\text{сопротивление}}{\rho U_0^2 d} = \frac{(\xi_2)_0^3}{18c_m^2} \int_{-(\xi_2)_0}^{+(\xi_2)_0} \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2 d\xi_2 = \frac{(\xi_2)_0^4}{20c_m^2}.$$

Но из-за низкой точности измерений скорости вблизи границ следа экспериментальные данные в этой области имеют большой разброс. Поэтому определить точное значение $(\xi_2)_0$ весьма затруднительно. По этой причине указанную величину обычно предпочитают определять по полуширине $(\xi_2)_{1/2}$, т. е. по тому значению ξ_2 , при котором $\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max} = 0,5$. Эта полуширина, согласно уравнению (6.30), описывается соотношением

$$\frac{(\xi_2)_{1/2}}{(\xi_2)_0} = 0,441.$$

Индуктивная теория Рейхардта

Хотя индуктивную теорию Рейхардта пока и не принято считать классической, мы все же кратко рассмотрим результаты, которые получаются по этой теории для течения в следе. Согласно этой теории, поток импульса $\rho \overline{(U_0 + U_1)^2}$ удовлетворяет уравнению диффузии (5.23). Но так как

$$\overline{(U_0 + U_1)^2} = U_0^2 + 2U_0\bar{U}_1 + \bar{U}_1^2 + \bar{u}_1^2,$$

а величина U_0^2 имеет постоянное значение, Рейхардт [1] вместо величины $\overline{(U_0 + U_1)^2}$ ввел в рассмотрение величину

$$\bar{\mathfrak{B}}^2 = 2U_0\bar{U}_1 + \bar{U}_1^2 + \bar{u}_1^2. \quad (6.32)$$

Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\mathfrak{B}}^2 = \mathcal{L} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \bar{\mathfrak{B}}^2. \quad (6.33)$$

Здесь снова используется предположение о подобии профилей $\bar{\mathfrak{B}}^2$ в последовательно расположенных сечениях.

Поэтому, если положить, что

$$\frac{\bar{\mathfrak{B}}^2}{U_0^2} = \psi_1(\xi_1) f_1(\xi_2), \quad (6.34)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются соотношениями (6.20) и (6.25), то оказывается, что подобие существует только в том случае, когда [см. также соотношение (6.23)]

$$\psi_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\xi_1}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathcal{L}}{d} = \text{const.} \quad (6.35)$$

Тогда функция $f_1(\xi_2)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathcal{L}}{d} \frac{d^2 f_1}{d\xi_2^2} + \frac{\xi_2}{2} \frac{df_1}{d\xi_2} + \frac{1}{2} f_1 = 0. \quad (6.36)$$

Легко проверить, что функция

$$f_1 = \exp\left(-\frac{d}{4\mathcal{L}} \xi_2^2\right)$$

является решением дифференциального уравнения (6.36). Отсюда

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_0^2} = A_1 \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} \exp\left(-\frac{d}{4\mathcal{L}} \xi_2^2\right). \quad (6.37)$$

Если сравнить это решение с другим решением типа Гаусса (6.29а), то можно заметить следующее несоответствие между ними: в решении (6.29а) величиной, которая пропорциональна $\sqrt{d/(x_1 + a)}$, является $\overline{U}_{1, \max}/U_0$, а здесь $\overline{\mathfrak{B}}_{\max}^2/U_0^2$. Но

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_0^2} = 2 \frac{\overline{U}_1}{U_0} + \frac{\overline{U}_1^2}{U_0^2} + \frac{\overline{u}_1^2}{U_0^2},$$

а так как предполагалось, что $\overline{U}_1/U_0 \ll 1$, то квадратичными членами в правой части здесь можно пренебречь. Таким образом, фактически приходим к прежнему решению, а именно:

$$\frac{\overline{U}_1}{U_0} = \frac{1}{2} A_1 \sqrt{\frac{d}{x_1 + a}} \exp\left(-\frac{d}{4\mathcal{L}} \xi_2^2\right). \quad (6.37a)$$

Из сравнения с выражениями (6.26) и (6.29а) получаются следующие формальные соотношения:

$$A_1 = 2A, \quad U_0 \mathcal{L} = (\epsilon_m)_{11}.$$

§ 6.4. Перенос скалярной субстанции в следе за цилиндром

Если в уравнении (1.28) для переноса скалярной субстанции Γ воспользоваться теми же предположениями, что и выше, то получим

$$U_0 \frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \Gamma}. \quad (6.38)$$

Если, кроме того, принять, что турбулентный перенос величины γ

может быть описан с той же степенью приближения с помощью тензора диффузии $(\epsilon_\gamma)_{ij}$, то, согласно формуле (1.30), величина $\overline{u_2\gamma}$ запишется так:

$$-\overline{u_2\gamma} = (\epsilon_\gamma)_{22} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_2},$$

и, следовательно,

$$U_0 \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\epsilon_\gamma)_{22} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_2} \right]. \quad (6.39)$$

Это уравнение, конечно, стало бы полностью аналогично уравнению (6.18), если в (6.18) положить, что

$$\sigma_{12} = \rho (\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Следовательно, если профили $\bar{\Gamma}$ тоже считать подобными, то для $(\epsilon_\gamma)_{22}/U_0 d$ получается соотношение, аналогичное формуле (6.28), а именно:

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{22}}{U_0 d} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_2 \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_{\max}}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_{\max})}. \quad (6.40)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \exp \left[-\frac{U_0 d}{2} \int_0^{\xi_2} \frac{\xi_2 d\xi_2}{(\epsilon_\gamma)_{22}} \right]. \quad (6.41)$$

В простейшем случае постоянного значения $(\epsilon_\gamma)_{22}$ вновь получается решение Гаусса:

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \exp \left[-\frac{U_0 d}{4 (\epsilon_\gamma)_{22}} \xi_2^2 \right]. \quad (6.41a)$$

Из решений (6.29a) и (6.41a) следует, что

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right)^{(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22}}. \quad (6.42)$$

Однако этот результат, по-видимому, носит более общий характер. Он получается также и из соотношений (6.29) и (6.41), если предположить, что отношение $(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22}$ постоянно во всей области следа и, стало быть, величины $(\epsilon_m)_{11}$ и $(\epsilon_\gamma)_{22}$ не обязательно должны быть постоянными каждая в отдельности.

Теория Прандтля переноса импульса

Если в отношении величины $(\epsilon_\gamma)_{22}$ воспользоваться прандтлевской гипотезой переноса импульса, то получим

$$(\epsilon_\gamma)_{22} = l_\gamma^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|. \quad (6.43)$$

При использовании распределения скорости (6.30)³⁾, полученного по теории переноса импульса, и при $l_\gamma = c_\gamma \sqrt{d(x_1 + a)}$ выражение для $(\epsilon_\gamma)_{22}$ принимает вид

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{22}}{U_0 d} = \frac{1}{6} \frac{c_\gamma^2}{c_m^2} (\xi_2)_0^2 \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\} \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{1/2}. \quad (6.44)$$

Подставляя это выражение в соотношение (6.41) и выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^{2c_m^2/c_\gamma^2}, \quad (6.45)$$

однако поскольку $(\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\gamma)_{22} = l_m^2/l_\gamma^2 = c_m^2/c_\gamma^2 = \text{const}$, то этот результат сразу следует из соотношений (6.42) и (6.30).

В более ранних работах (см., например, [2]) часто предполагалось, что $l_\gamma = l_m$; однако это предположение не является справедливым. Если бы это было так, то распределение $\bar{\Gamma}$ было бы идентично распределению скорости. В связи с тем, что все опыты по исследованию теплового следа за нагретым цилиндром свидетельствуют о большем распространении температуры, нежели скорости, то от теории переноса импульса пришлось отказаться. Однако это нельзя признать оправданным указанными аргументами, так как экспериментальные факты показали лишь несправедливость предположения $l_\gamma = l_m$.

Теория Тэйлора переноса завихренности

В теории переноса завихренности для распределения скорости получается прежний результат, поскольку

$$(\epsilon_m)_{11} = (\epsilon_\omega)_{11} = \frac{l_\omega^2}{2} \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|. \quad (5.8)$$

Поэтому распределение $\bar{\Gamma}$ получается из уравнения (6.45) простой заменой c_m^2 на $c_\omega^2/2$:

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^{c_\omega^2/c_\gamma^2}. \quad (6.46)$$

Если принять предположение о том, что $l_\gamma = l_\omega$ (см., например, [2]), то распространение $\bar{\Gamma}$, согласно теории переноса завихренности, получается больше, нежели распространение \bar{U}_1 . Этот результат принято считать аргументом в пользу последней теории, тем более, что количественное различие между измеренными распространениями температуры и скорости достаточно хорошо согласуется с опытными данными (см. § 6.5). Однако поскольку предположение $l_\omega = l_\gamma$ произвольно и не имеет под собой реальных физических оснований, то этот аргумент в пользу теории переноса завихренности является не очень сильным.

Индуктивная теория Рейхардта

В индуктивной теории Рейхардта приходится в данном случае рассматривать перенос величины $(U_0 + U_1)\bar{\Gamma}$. Но с той же самой степенью приближения, которая была принята и в других теориях, следует учитывать только величину $U_0\bar{\Gamma}$, так что уравнение диффузии (5.26) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_1} = \mathcal{L}_\gamma \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial x_2^2}. \quad (6.47)$$

Решение этого уравнения, основанное на предположении о подобии профилей $\bar{\Gamma}$, записывается в виде

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \exp\left(-\frac{d}{4\mathcal{L}_\gamma} \xi_2^2\right). \quad (6.48)$$

Сравнение с решением (6.41a) дает следующее формальное соотношение:

$$U_0 \mathcal{L}_\gamma = (\epsilon_\gamma)_{22}.$$

§ 6.5. Результаты измерения распределений осредненной скорости и осредненной температуры в следе за цилиндром

Измерения распределений осредненной скорости на различных расстояниях от цилиндра были проведены Шлихтингом [3], Фейджем и Фокнером [4], а также Таунсендом [5]. В теориях, описывающих эти распределения и рассмотренных в предыдущем параграфе, предполагалось подобие профилей этих распределений в последовательно расположенных поперечных сечениях следа. Следовательно, при сравнении измеренных распределений с теоретическими нам прежде всего следует проверить, насколько действительная картина течения в следе обладает таким подобием. Прежде всего, имеется подобие по числу Рейнольдса. Известно, что при достаточно больших числах Рейнольдса коэффициент сопротивления цилиндра становится

независимым от этого критерия в широком диапазоне его значений. Поскольку на некотором расстоянии от цилиндра картина турбулентного течения почти полностью определяется работой, совершаемой силой сопротивления, то при больших числах Рейнольдса логично ожидать подобия. Таунсенд обнаружил, что практически никакого влияния числа Рейнольдса на распределение осредненной скорости не наблюдается при $Re_d > 800$.

Что касается подобия картины течения в последовательных поперечных сечениях, то оказалось, что автомодельность общей структуры потока, характеризуемой распределением осредненной скорости и увеличением ширины следа с расстоянием от цилиндра, наблюдается на расстояниях

$$\xi_1 = \frac{x_1 + a}{d} > 90,$$

но что для установления автомодельности тонкой структуры турбулентности требуются значительно большие расстояния: $\xi_1 = 500 \div 1000$.

Если сравнить результаты опытов Таунсенда [5, 6] для значений $\xi_1 > 500$ с теоретическими распределениями, соответствующими «классическим» теориям, то оказывается, что теория переноса импульса (а следовательно, также и теория переноса завихренности,

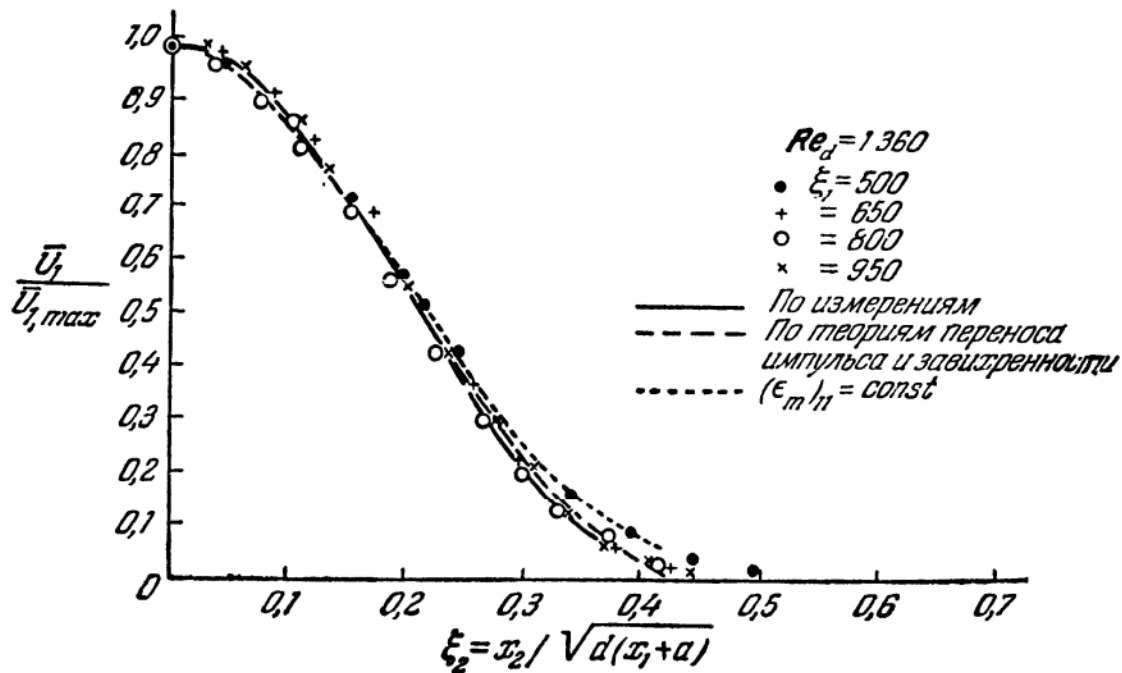


Рис. 6.3. Распределение скорости в следе за круглым цилиндром [6].

которая приводит к такому же результату) дает решение, достаточно хорошо согласующееся с измеренным распределением, за исключением областей, прилегающих к оси и к границе следа. На рис. 6.3 изображены измеренное и вычисленное распределения скорости; постоянная $(\xi_2)_0$, содержащаяся в выражении (6.30), принята равной 0,48.

Из соображений, которые будут изложены ниже, отмеченному расхождению вблизи границы следа не следует придавать серьезного значения. Существенно более важным для суждения об этих теориях является тот факт, что вблизи оси следа вычисленное распределение дает значения, которые ниже измеренных скоростей; это означает, что теоретическая величина коэффициента переноса слишком мала (на оси она даже обращается в нуль).

Очень хорошее соответствие отмечается для гауссова распределения (6.29а), которое в настоящем случае записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp \left[- \left(\frac{\xi_2}{0,256} \right)^2 \right].$$

Незначительное отклонение от экспериментальных значений наблюдается лишь вблизи границы следа. В этой области действительное значение кажущегося коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{11}$ намного меньше постоянного значения, принятого для основной (центральной) части кривой распределения скорости. Это постоянное значение, согласно экспериментальным данным, составляет

$$(\epsilon_m)_{11} = \frac{1}{4} (0,256)^2 U_0 d = 0,016 U_0 d.$$

Если величину $(\epsilon_m)_{11}$ вычислить непосредственно по измеренному распределению скорости, используя выражение (6.28), то оказывается, что величина $(\epsilon_m)_{11}$ практически постоянна в основной (центральной) части следа.

Если по значениям $(\epsilon_m)_{11}$, полученным непосредственно по измеренному распределению скорости, вычислить величину пути смещения l_m , то окажется, что величина $(\epsilon_m)_{11}$ непостоянна в поперечном сечении следа: она обращается в бесконечность на оси следа и в нуль — на его границе.

Среднее значение l_m можно вычислить по постоянной величине c_m , содержащейся в выражении (6.31). По опытным данным Таунсенда можно получить соотношение $l_m/(x_2)_{1/2} \approx 0,4$, где $(x_2)_{1/2}$ — полуширина. По опытным данным Шлихтинга соответствующая величина оказывается равной 0,46. Эти величины, как видим, являются далеко не малыми в отличие от того, что предполагалось в теориях пути смещения.

Эти факты, а именно: непостоянство значения l_m , а также то, что среднее значение l_m не слишком мало по сравнению с шириной следа, являются сильными аргументами против теории пути смещения.

По измеренному распределению скорости с помощью соотношений (6.27) можно вычислить распределение напряжения сдвига. Если принять, например, что кривая ошибок Гаусса является удовлетворительным приближением к действительному распределению скорости,

то вычисления показывают, что максимальное значение напряжения сдвига равно

$$\left(\frac{\sigma_{12}}{\rho U_0^2} \right)_{\max} = -\frac{A}{2} \frac{d}{x_1 + a} \sqrt{\frac{2(\epsilon_m)_{11}}{e U_0 d}}$$

(здесь e означает основание натуральных логарифмов).

Это максимальное значение имеет место в точке

$$(\xi_2)_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d}}.$$

Поскольку

$$(\xi_2)_{1/2} = \sqrt{\frac{4(\epsilon_m)_{11}}{U_0 d} \ln 2},$$

то видно, что $(\xi_2)_{\text{опт}}$ меньше полуширины $(\xi_2)_{1/2}$. Как мы увидим ниже, максимальное порождение турбулентности происходит вне области, ограниченной координатой $(\xi_2)_{1/2}$, и, стало быть, не при $(\xi_2)_{\text{опт}}$.

Измерения температуры в тепловом следе за нагретым цилиндром производились Фейджем и Фокнером [4], а также Таунсендом [6]. Опыты Таунсенда показывают, что подобие между профилями температуры в последовательно расположенных поперечных сечениях устанавливается на расстояниях, превышающих $\xi_1 = 500$. При этом профили теплового потока $\overline{u_2 \theta}$ также оказываются подобными.

Опытные данные, полученные этими исследователями и удовлетворительно согласующиеся между собой, показывают, что распространение тепла должно быть значительно больше, нежели распространение импульса; по крайней мере, ширина температурного следа должна быть намного больше ширины скоростного.

На рис. 6.4 приведены результаты измерений Фейджа и Фокнера, а также кривые, соответствующие различным теориям, а именно:

1. Теории Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m$ [см. решение (6.45)]:

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = \left\{ 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2} \right\}^2.$$

2. Теории Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m \sqrt{2}$ или теории Тэйлора переноса завихренности при $c_\gamma = c_\omega$ [см. решение (6.46)]:

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_{\max}} = 1 - \left[\frac{|\xi_2|}{(\xi_2)_0} \right]^{3/2}.$$

3. Теории Буссинеска при $(\epsilon_\gamma)_{22} = \text{const}$ [см. решение (6.41a)].

Количество экспериментальных точек здесь не очень велико, и поскольку, кроме того, эти экспериментальные данные имеют

значительный разброс, то затруднительно решить, какой из теорий следует отдать предпочтение, исключая теорию Прандтля переноса импульса при $c_\gamma = c_m$, которая приводит к идентичным распределениям для температуры и скорости. В записанных выше выражениях для $\bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}_{\max}$ снова принято $(\xi_2)_0 = 0,48$.

Если, однако, в теории Прандтля переноса импульса положить $c_\gamma = c_m \sqrt{2}$ или в теории Тэйлора переноса завихренности $c_\gamma = c_\omega$, то согласование с экспериментальными данными на большей части

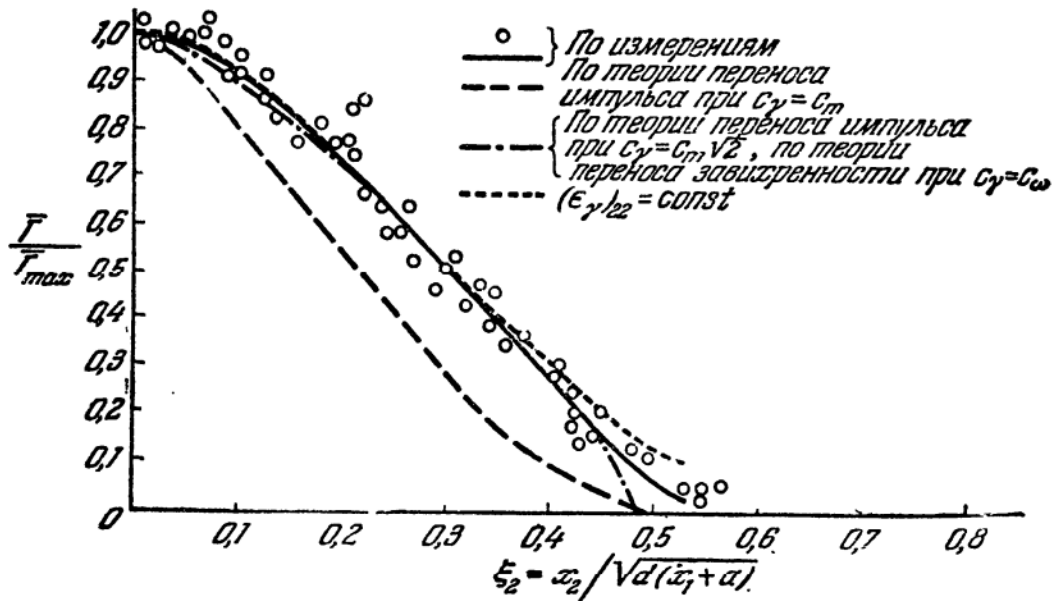


Рис. 6.4. Распределение температуры в следе за круглым цилиндром [4].

следа получается удовлетворительным, за исключением самой центральной части следа и зоны, прилегающей к его границе.

Коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{22}$ может быть вычислен по измеренному распределению температуры с помощью соотношения (6.40). Если это проделать, то получится почти постоянное значение $(\epsilon_\gamma)_{22}$ в поперечном сечении следа, причем среднее значение $(\epsilon_\gamma)_{22} \approx 0,12 U_0 d$. Это значение почти в два раза превышает величину $(\epsilon_m)_{11}$. Согласно теории Тэйлора переноса завихренности, при $c_\gamma = c_\omega$ должно было бы быть $(\epsilon_\gamma)_{22} = 2(\epsilon_m)_{11}$.

Кривая ошибок Гаусса снова приводит к наилучшему соотношению, за исключением приграничной зоны. Соответствующее значение $(\epsilon_\gamma)_{22} = 0,119 U_0 d$, т. е. составляет $1,85(\epsilon_m)_{11}$.

§ 6.6. Измерение характеристик турбулентности в следе за цилиндром

Наиболее систематические измерения характеристик турбулентности были произведены Таунсендом; результаты этих измерений опубликованы в его работах [5–9]. Измерения проводились в различных поперечных сечениях следа при относительных расстояниях ξ_1 от 80 до 950. Большинство измерений соответствует скорости невозмущенного потока $U_0 = 1280$ см/сек и цилиндру с диамет-

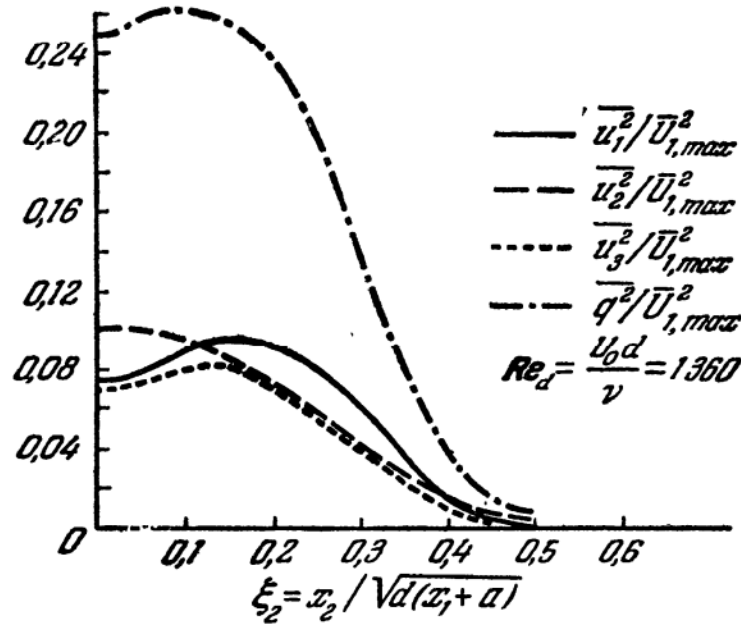


Рис. 6.5. Распределение компонент относительной интенсивности турбулентности в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500; 650; 800$ и 950 [6].

ром $0,159$ см; некоторое количество экспериментальных точек получено также для цилиндра с диаметром $0,953$ см.

В предыдущем параграфе уже указывалось, что автомодельность тонкой структуры турбулентности в различных поперечных сечениях устанавливается только на больших расстояниях вниз по потоку от цилиндра, например при $\xi_1 = 500$. Однако для таких больших расстояний не имеется всех данных, которые нам хотелось бы привести здесь. Но, так или иначе, мы все же приведем некоторые из них, так как факты, вытекающие из их анализа, несмотря на неполную автомодельность, представляют значительный интерес.

На рис. 6.5 представлены значения квадратов компонент относительной интенсивности турбулентности: $\overline{u_1^2} / \overline{U_{1, \max}^2}$, $\overline{u_2^2} / \overline{U_{1, \max}^2}$ и $\overline{u_3^2} / \overline{U_{1, \max}^2}$. Изображенные здесь кривые проходят по средним значениям этих величин для четырех поперечных сечений, соответствующих $\xi_1 = 500$;

650; 800 и 950. Разница между распределениями каждой из этих величин в указанных сечениях невелика и лежит в пределах разброса экспериментальных точек; следовательно, между различными кривыми действительно существует хорошее подобие.

На рис. 6.6 показаны кривые изменения напряжения сдвига $\overline{u_1 u_2} / \overline{U_{1, \max}^2}$ и коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11} / U_0 d$, а на рис. 6.7 — кривые изменения характеристик переноса в поперечном направлении $\overline{u_1^2 u_2} / \overline{U_{1, \max}^3}$, $\overline{u_2^3} / \overline{U_{1, \max}^3}$ и $\overline{u_3^2 u_2} / \overline{U_{1, \max}^3}$.

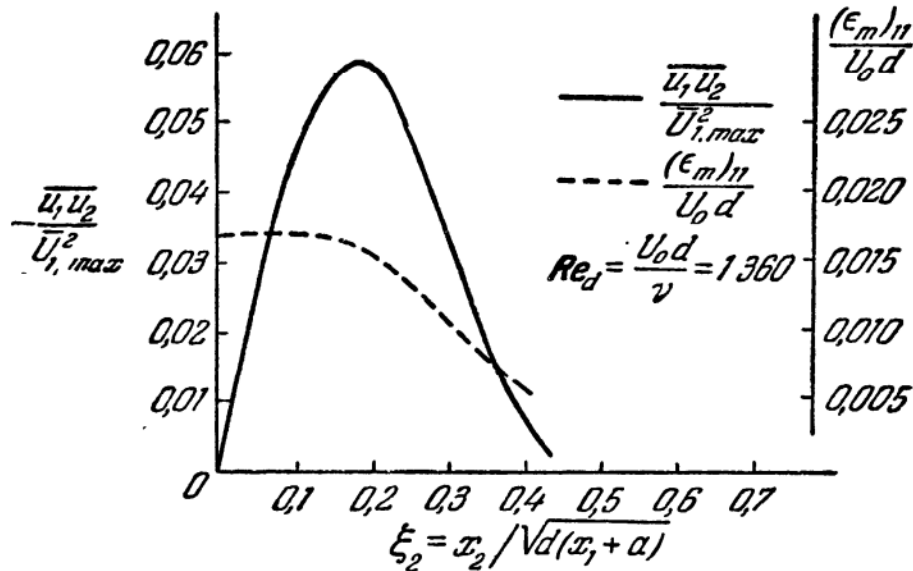


Рис. 6.6. Распределение напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500; 650$ и 800 [6].

Кривые распределения $\overline{u_1^2 u_2} / \overline{U_{1, \max}^3}$ и $\overline{u_3^2 u_2} / \overline{U_{1, \max}^3}$ в центральной области следа имеют участки с отрицательными значениями, что указывает на наличие переноса по направлению к оси следа. Это согласуется с характером изменения градиентов интенсивности, изображенной на рис. 6.5, хотя более тщательный анализ соответствующих кривых показывает, что области, в которых наблюдается перенос по направлению к оси следа, и области, в которых градиенты интенсивности вблизи центра следа положительны, не полностью перекрывают друг друга. Следовательно, имеется небольшой участок области течения, где перенос, по-видимому, происходит в направлении, противоположном тому, которое определяется градиентом интенсивности. К этому вопросу мы возвратимся несколько ниже.

Диссипация турбулентности на единицу массы в неизотропном турбулентном потоке выражается следующим образом:

$$\epsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Для точного определения диссипации потребовалось бы измерить все величины вида $\overline{(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_k / \partial x_l)}$. Как известно, в случае изотропной турбулентности это сложное выражение для ϵ упрощается:

$$\epsilon = -15\nu u'^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right]_{r=0} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Было бы очень удачно, если бы удалось воспользоваться этим простым выражением для ϵ . К счастью, турбулентность в следе обладает вполне достаточной степенью локальной изотропности, чтобы

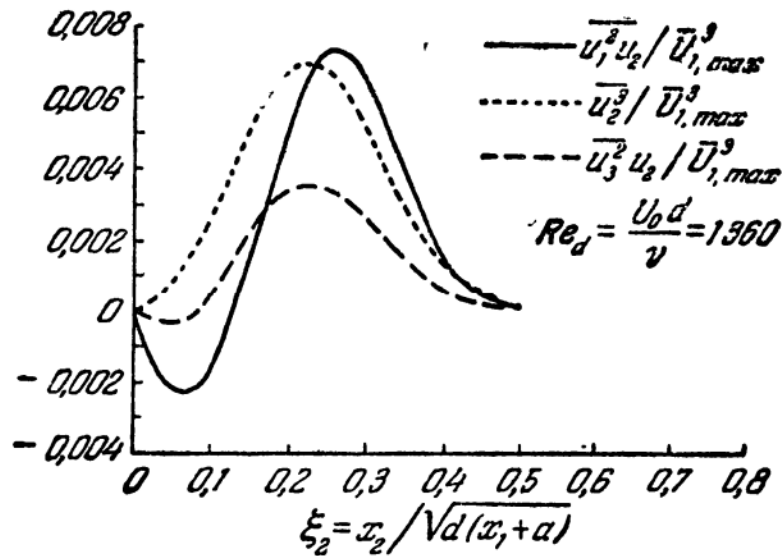


Рис. 6.7. Интенсивность поперечного переноса под действием турбулентности компонент интенсивности турбулентности в поперечных сечениях следа за круглым цилиндром, соответствующих $\xi_1 = 500; 650; 800$ и 950 [6].

можно было пользоваться этой формулой. Таунсенд [8] произвел измерение коэффициентов асимметрии и сплющивания в следе за цилиндром, которые определяются как

$$S = \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^3}}{\left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} \right]^{3/2}}, \quad T = \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^4}}{\left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} \right]^2}.$$

При изотропной турбулентности эти коэффициенты принимают соответственно значения $S = -0,38$ и $T = 3,5$. В случае следа за цилиндром Таунсенд обнаружил, что в центральной области следа (вплоть до $\xi_2 \approx 0,2$) эти коэффициенты почти постоянны и их значения весьма близки к указанным выше значениям для изотропной турбулентности. Помимо этого, Таунсенд показал, что следующие

соотношения, справедливые для изотропной турбулентности, приближенно выполняются также и для центральной области следа:

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2}.$$

В соответствии с этим, Таунсенд экспериментально находил диссипацию энергии в следе за цилиндром, пользуясь простым «изотропным» выражением для ϵ . Результаты этих измерений для поперечного сечения, соответствующего $\xi_1 = 160$, представлены на рис. 6.8.

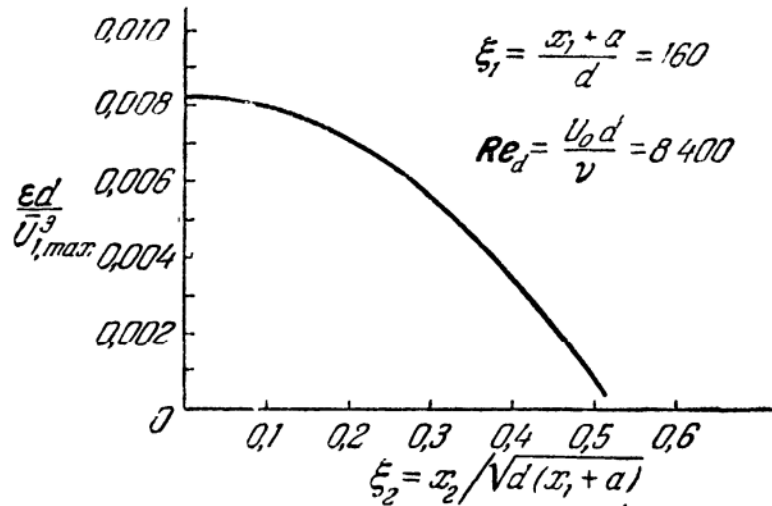


Рис. 6.8. Диссипация энергии в поперечном сечении ($\xi_1 = 160$) следа за круглым цилиндром [9].

С помощью приведенных выше данных о характеристиках турбулентности Таунсенду удалось установить баланс энергии турбулентности, определяемый уравнением (1.98), которое для рассматриваемого здесь течения в следе сводится к следующему приближенному соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1'} \frac{1}{2} \frac{\bar{q}^2}{U_0^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2'} \frac{1}{U_0^3} \overline{u_2 \left(\frac{P}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} + \\ + \frac{\overline{u_1 u_2}}{U_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2'} \frac{\bar{U}_1}{U_0} + 15 \frac{\nu}{U_0 d} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1'} \frac{u_1}{U_0} \right)^2} = 0, \end{aligned}$$

где $\xi_1' = x_1/d$ и $\xi_2' = x_2/d$.

В этом уравнении были измерены все слагаемые, за исключением $\overline{u_2 p}$. Это слагаемое, которое характеризует турбулентный перенос давления, определялось как разность. Это является слабым местом рассматриваемой методики, так как, если бы это слагаемое тоже удалось определить экспериментально, выписанное выше уравнение можно было бы использовать для проверки надежности измерения

отдельных слагаемых. Именно таким путем пошел Кобаши [44], которому удалось измерить величину слагаемого, характеризующего перенос давления *).

Различные слагаемые уравнения баланса энергии, полученные Таунсендом для сечения $\xi_1 = 160$, изображены на рис. 6.9. Если рассматривать элемент объема в следе, то вклад вязкой диссипации в энергию турбулентности в этом элементе всегда будет отрицательным.

На рис. 6.9 диссипативный член показан как положительный. Значит, положительная величина здесь означает отрицательный вклад,

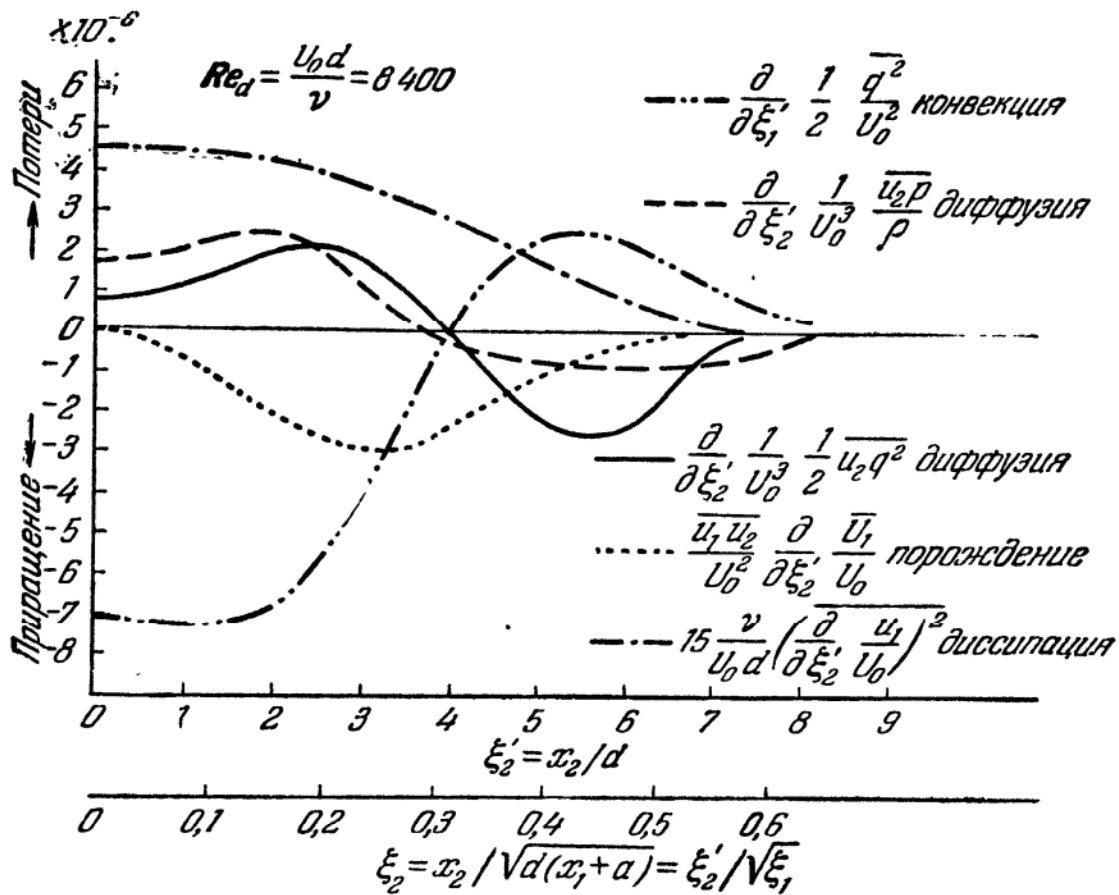


Рис. 6.9. Баланс энергии в следе за круглым цилиндром в сечении $\xi_1 = 160$ [7].

или потерю энергии. И наоборот, отрицательная величина на этом графике означает прирост энергии.

Из рассмотрения рис. 6.9 следует, что в разных частях следа вклады от различных слагаемых неодинаковы. Вблизи центра следа порождение энергии пренебрежимо мало, и главный прирост ее

*) Для этой цели Кобаши в качестве преобразователя для измерения пульсаций статического давления использовал приемник давления с конденсаторным микрофоном вместе с термоанемометром вращательного типа, расположенным вблизи отверстий статического давления в трубке-приемнике давления.

происходит за счет конвекции в осевом направлении через основной поток. Этот прирост уравнивается диссипацией и турбулентным переносом в наружном направлении (диффузия). Порождение энергии достигает максимума при $\xi_2 \approx 0,25$, а максимальное значение напряжения сдвига наблюдается при $(\xi_2)_{\text{опт}} \approx 0,18$ (см. рис. 6.6).

В точке $\xi_2 \approx 0,325$ диффузия и конвекция пренебрежимо малы, а порождение энергии равняется ее локальной диссипации. Это — единственная точка во всей области следа, где, строго говоря, справедлива гипотеза Прандтля $u'_2 \sim l_m \partial \bar{U}_1 / \partial x_2$ (см. § 5.2).

В области внешней границы следа диффузия кинетической энергии, порождение и диссипация малы. Энергия, которая подводится благодаря поперечному переносу энергии давления, отводится конвекцией в осевом направлении.

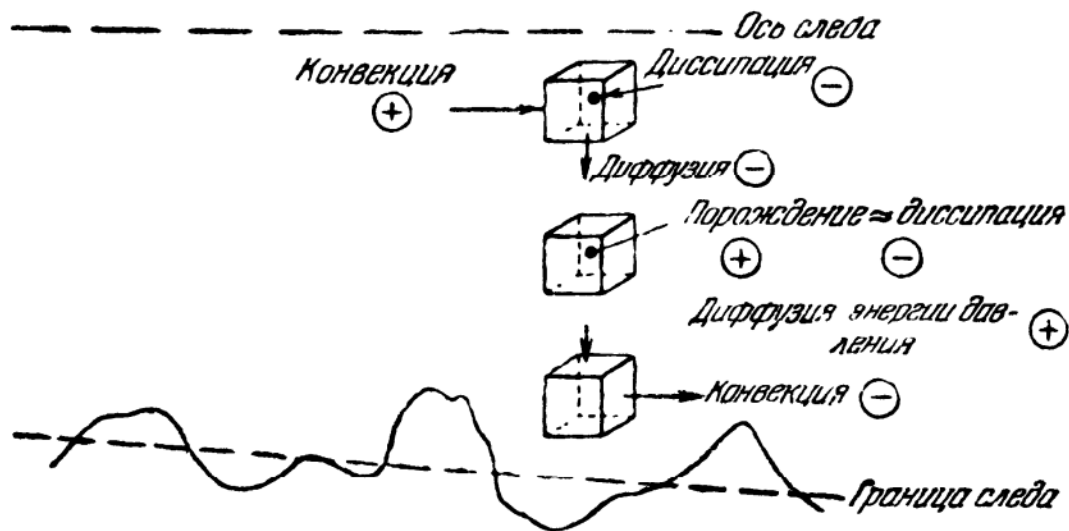


Рис. 6.10. Вклад в энергию турбулентности от различных областей следа за цилиндром.

Эти различия во вкладах в энергию турбулентности на различных участках следа иллюстрируются на рис. 6.10. В центральной области конвекция в осевом направлении $U_0 (\partial / \partial \xi'_1) \frac{1}{2} \bar{q}^2$ дает положительный вклад; это наблюдается до тех пор, пока величина $(\partial / \partial \xi'_1) \frac{1}{2} \bar{q}^2$ не станет положительной. Однако во внешней области этот вклад оказывается отрицательным, что должно было бы указывать на положительный знак величины $(\partial / \partial \xi'_1) \frac{1}{2} \bar{q}^2$; но это представляется не очень логичным. Однако следует иметь в виду, что величина $(\partial / \partial \xi'_1) \frac{1}{2} \bar{q}^2$ берется в направлении, параллельном оси следа, тогда как линии тока становятся расходящимися, а ширина следа в направлении вниз по потоку увеличивается. Следовательно, величина

$(\partial/\partial\xi_1) \frac{1}{2} \overline{q^2}$ может быть положительной, хотя ее градиент вдоль линии $\xi_2 = \text{const}$ является отрицательным.

Если рассмотреть ход изменения различных характеристик турбулентности в поперечном сечении следа, то можно заметить, что некоторые из них, например кинетическая энергия турбулентности, диссипация и коэффициент вихревой вязкости, в центральной области следа изменяются очень слабо, а в направлении к граничной области более или менее быстро уменьшаются. Подобное поведение характеристик турбулентности указывает как бы на определенную однородность турбулентности в центральной части следа. Эта мысль подкрепляется наблюдениями, показавшими, что микро- и интегральный масштабы в поперечном сечении следа тоже изменяются очень слабо.

Но, в то время как в центральной части следа турбулентность практически полностью непрерывна по времени, вблизи границы



Рис. 6.11. Мгновенная картина течения в следе за цилиндром.

следа турбулентность становится все более и более перемежающейся. Этот вывод иллюстрируется на рис. 6.11; можно также сослаться на осциллограммы, приведенные на рис. 1.9.

Таунсенд выдвинул предположение, что турбулентность может быть однородной в области, значительно большей той, которая соответствует зоне центрального непрерывного ядра. Это должно было бы означать, что уменьшение различных параметров турбулентности в направлении к внешней области следа является только кажущимся и связано с перемежающимся характером течения. Анализ осциллограмм скорости, снятых в различных точках следа (типа тех, которые изображены на рис. 1.9), показывает, что пульсации в турбулентных зонах вблизи границы следа имеют такие же черты, как и в области полностью турбулентного ядра. Если это так, то корреляция скорости $u(t)$ и $u(t - \tau)$ должна иметь одну и ту же величину как в области турбулентного ядра, так и в турбулентных областях внутри выпучин («протуберанцев») на границе следа. По-видимому, так оно и есть на самом деле.

В качестве меры перемежаемости турбулентности можно выбрать отношение Ω интервала времени, в течение которого наблюдается турбулентное движение, к полному промежутку времени. Это отношение, названное Бэтчелором и Таунсендом коэффициентом перемежаемости, в непрерывной турбулентной области равно единице, а по направлению к внешней границе стремится к нулю.

Для определения коэффициента перемежаемости в следе за цилиндром Таунсенд [8] воспользовался двумя методами. Первый из них — косвенный — основан на измерении осредненных по времени степеней производных от скорости. При этом имеем

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}_{\text{перемеж}} = \Omega \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}_{\text{непр}}, \quad \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}_{\text{перемеж}} = \Omega \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}_{\text{непр}}.$$

Таким образом, коэффициент сплющивания T для $\partial u_1/\partial x_1$ принимает вид

$$T\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^4}_{\text{перемеж}}}{\left[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}_{\text{перемеж}}\right]^2} = \frac{1}{\Omega} \frac{\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^4}_{\text{непр}}}{\left[\overline{(\partial u_1/\partial x_1)^2}_{\text{непр}}\right]^2}.$$

Отсюда следует, что отношение $T_{\text{непр}}/T_{\text{перемеж}} = \Omega$ представляет собой непосредственную меру коэффициента перемежаемости. Этот метод можно применять в том случае, когда микроструктура турбулентности в непрерывной и перемежающейся частях следа обладает достаточной однородностью.

Другой метод основан на использовании такой электрической схемы, которая на выходе термоанемометра создает сигнал, равный нулю, когда $(\partial u_1/\partial x_1)^2 = 0$, и равный единице, когда величина $(\partial u_1/\partial x_1)^2$ превышает соответствующим образом выбранное предельное значение. Средняя величина этого выходного сигнала равна коэффициенту перемежаемости. Этот метод применим только в тех случаях, когда в течение одного периода турбулентного движения происходит большое число полных пульсаций скорости. Это условие обычно удовлетворяется, если число Рейнольдса турбулентного потока велико.

На рис. 6.12 представлены результаты измерений коэффициента перемежаемости Ω . Можно заметить, что коэффициент перемежаемости начинает значительно отличаться от единицы уже на относительно небольших расстояниях от оси следа, т. е. в тех областях, которые принято считать полностью турбулентными.

Если турбулентность почти однородна в турбулентных областях, включая области внутри выпучин («протуберанцев»), то соответствующие характеристики турбулентности в сечении следа после внесения поправки на коэффициент перемежаемости должны иметь практически постоянные значения. Анализ рис. 6.13 показывает, что это почти

так и есть на самом деле. Кинетическая энергия турбулентности, диссипация и коэффициент вихревой вязкости, которые приведены

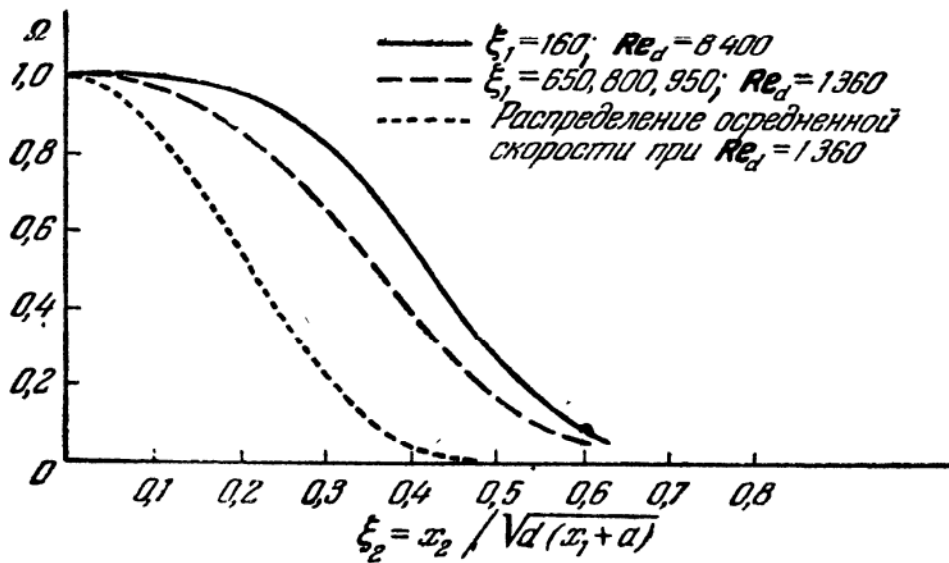


Рис. 6.12. Изменение коэффициента перемежаемости Ω при течении в следе за круглым цилиндром [9].

соответственно на рис. 6.5, 6.8 и 6.6, будучи поделенными на коэффициент перемежаемости, в значительной части поперечного

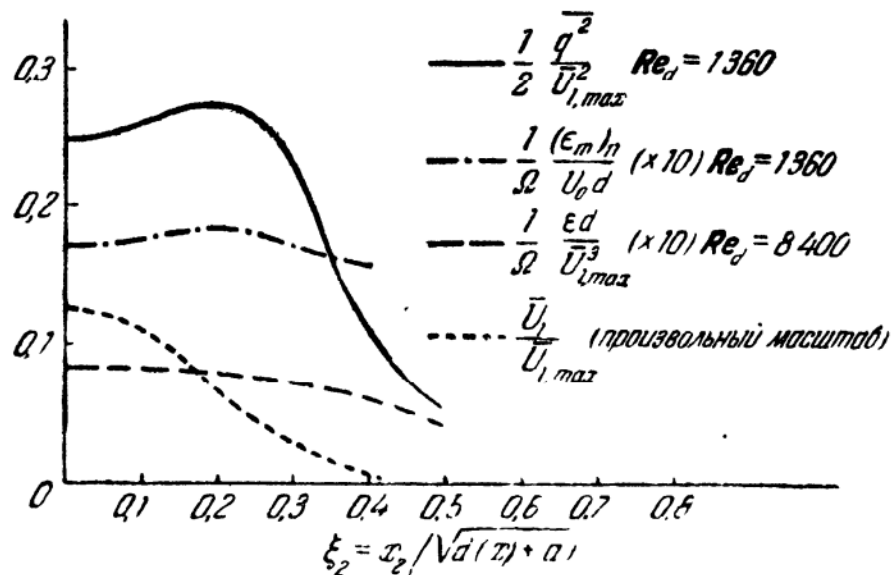


Рис. 6.13. Характеристики турбулентности в турбулентных областях в полном поперечном сечении следа за цилиндром.

сечения следа оказываются практически постоянными (см. рис. 6.12). В частности, заслуживает внимания постоянство коэффициента вихревой вязкости и диссипации в сечении следа.

§ 6.7. Распределение скорости в круглой свободной струе по классическим теориям

Здесь мы рассмотрим применение теорий Буссинеска, Прандтля, Тэйлора и Рейхардта к распределению осредненной скорости в круглой свободной струе.

Представим себе общий случай, когда струя со скоростью U_p вытекает из круглого отверстия диаметром d в поток, скорость U_s которого постоянна (рис. 6.14). Собственно струя и окружающий ее поток обычно называются соответственно первичным и вторичным потоками.

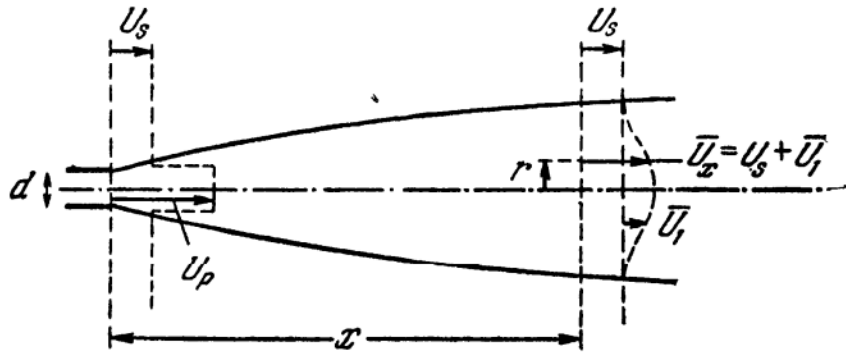


Рис. 6.14. Круглая свободная струя в спутном потоке с постоянной скоростью U_s .

Примем, что течение обладает осевой симметрией, а осевая координата x цилиндрической системы координат (x, r) совпадает с осью струи. Начало координат поместим в плоскости отверстия.

В области струи осевая компонента скорости U_x рассматривается как сумма двух слагаемых: скорости вторичного потока U_s и скорости U_1 , которая представляет собой избыток скорости струи над скоростью U_s . Снаружи струи давление постоянно; поэтому

$$\frac{dP_0}{dx} = 0.$$

Если принять допущения, перечисленные в § 6.2, то уравнение движения в проекции на направление оси струи запишется в виде [см. уравнение (6.18)]

$$\rho \left(\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{xr}).$$

Вводя сюда скорость $\bar{U}_x = U_s + \bar{U}_1$ и скорость истечения U_p , получаем уравнение для \bar{U}_1 :

$$\left(\frac{U_s}{U_p} + \frac{\bar{U}_1}{U_p} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{U}_1}{U_p} + \frac{\bar{U}_r}{U_p} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\bar{U}_1}{U_p} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2} \right). \quad (6.49)$$

Примем, что картины течения в последовательно расположенных сечениях, начиная с некоторого расстояния от отверстия, являются подобными. Тогда, следовательно, можно положить, что

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = f(\xi_2), \quad \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_{1, \max}} = g(\xi_2), \quad \frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_p} = \psi(\xi_1), \quad (6.50)$$

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = h(\xi_2),$$

где

$$\xi_2 = \frac{r}{d} \varphi(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{x+a}{d} \quad (6.51)$$

и a — расстояние между геометрическим центром подобия и началом системы координат.

Подставим в уравнение (6.49) выражения (6.50), помня при этом, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{d} \frac{\xi_2}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{d} \varphi \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Тогда уравнение (6.49) примет вид

$$(\mu + f\psi) \left(\frac{\psi}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \xi_2 \frac{df}{d\xi_2} + \frac{d\psi}{d\xi_1} f \right) + \psi^2 \varphi g \frac{df}{d\xi_2} = \psi^2 \varphi \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h), \quad (6.52)$$

где $\mu = U_s/U_p$ — отношение скорости вторичного и первичного потоков.

Как и в случае следа за телом, функции $\varphi(\xi_1)$ и $\psi(\xi_1)$ не являются независимыми. Это вытекает из граничного условия, получаемого

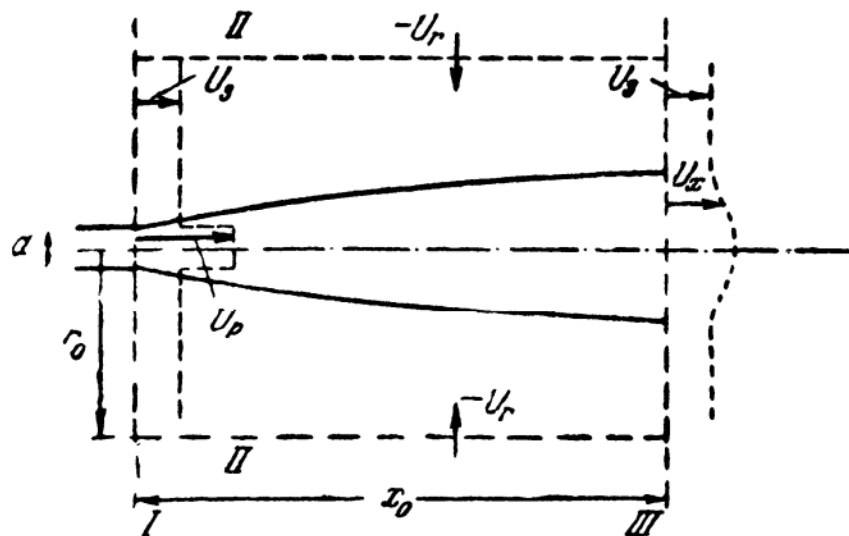


Рис. 6.15. Контрольные поверхности I, II и III, используемые при составлении баланса потока импульса.

путем интегрирования уравнения (6.49) по r , т. е. из баланса потока импульса.

Рассмотрим поток импульса через контрольные поверхности I, II и III (рис. 6.15). При этом радиус r_0 цилиндрической поверхности II

считается настолько большим, что осевая скорость потока в точке, соответствующей этому радиусу, практически равна U_s .

Поток импульса через плоскость I запишется в виде

$$U_p^2 \frac{\pi}{4} d^2 + U_s^2 \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \right). \quad (a)$$

Через цилиндрическую поверхность II происходит перенос жидкости к струе, который определяется уравнением неразрывности:

$$-2\pi r_0 \int_0^{x_0} U_r dx = 2\pi \int_0^{r_0} U_x r dr - U_p \frac{\pi}{4} d^2 - U_s \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \right).$$

Таким образом, поток осевой компоненты импульса через контрольную поверхность II представится в виде

$$\begin{aligned} -2\pi r_0 U_s \int_0^{x_0} U_r dx = \\ = 2\pi U_s \int_0^{r_0} U_x r dr - U_p U_s \frac{\pi}{4} d^2 - U_s^2 \left(\pi r_0^2 - \frac{\pi}{4} d^2 \right). \end{aligned} \quad (б)$$

Поток импульса через плоскость III имеет следующее выражение:

$$2\pi \int_0^{r_0} U_x^2 r dr. \quad (в)$$

Так как течение считается стационарным, а внешними силами, действующими на жидкость, заключенную между контрольными поверхностями, пренебрегается, то полный поток импульса (а) + (б) — (в) должен быть равен нулю. Это дает

$$2\pi \int_0^{\infty} U_x (U_x - U_s) r dr = U_p (U_p - U_s) \frac{\pi}{4} d^2,$$

поскольку ради простоты можно принять $r_0 \rightarrow \infty$. Правая часть этого уравнения, т. е. поток избыточного импульса жидкости, вытекающей из отверстия, имеет постоянную величину. Если воспользоваться средней по времени величиной и записать

$$U_x = U_s + \bar{U}_1 + u_1,$$

то с той же степенью приближения, с какой справедливо уравнение (6.49), получим

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\bar{U}_1}{U_p} \frac{U_s}{U_p} + \frac{\bar{U}_1^2}{U_p^2} \right) r dr = \text{const.}$$

В предположении об автомодельности течения интегральное соотношение импульсов принимает вид

$$\mu \frac{\psi}{\varphi^2} \int_0^{\infty} f \xi_2 d\xi_2 + \frac{\psi^2}{\varphi^2} \int_0^{\infty} f^2 \xi_2 d\xi_2 = \text{const.} \quad (6.53)$$

Теперь рассмотрим более подробно члены, входящие в уравнения (6.52) и (6.53). Как видим, каждый из них представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых является функцией только ξ_1 . Значит, подобие может иметь место лишь в том случае, когда все эти функции ξ_1 либо постоянны, либо пропорциональны друг другу. Поэтому они должны удовлетворять условию

$$\frac{d\psi}{d\xi_1} \sim \frac{\psi}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \sim \psi \frac{d\psi}{d\xi_1} \sim \psi^2 \varphi.$$

Легко убедиться в том, что этому условию нельзя удовлетворить, не впад в противоречие; исключение составляет лишь тривиальное нулевое решение.

Поэтому для общего случая, к которому относятся уравнения (6.52) и (6.53), не представляется возможным сохранить предположение о полном подобии в полностью развитой турбулентной части струи во всем диапазоне изменения ξ_1 . Подобие может сохраняться лишь в следующих двух предельных случаях, а именно:

$$\begin{aligned} &\text{когда либо } \psi f \gg \mu, \text{ либо } \psi f \ll \mu, \\ &\text{т. е. либо } \frac{\bar{U}_1}{U_s} \gg 1, \text{ либо } \frac{\bar{U}_1}{U_s} \ll 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим эти случаи отдельно; в первом из них

$$\frac{\bar{U}_1}{U_s} \gg 1, \text{ т. е. } f\psi \gg \mu.$$

Тогда интегральное соотношение импульсов (6.53) принимает вид

$$\frac{\psi^2}{\varphi^2} \int_0^{\infty} f^2 \xi_2 d\xi_2 = \text{const.}$$

откуда следует, что

$$\psi = A_1 \varphi,$$

где A_1 — численная постоянная.

Уравнение движения (6.52) приводится к следующей форме:

$$\varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1} \left(\xi_2 f \frac{df}{d\xi_2} + f^2 \right) + \varphi^3 \left[g \frac{df}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h) \right] = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1} = \text{const } \varphi^3.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\xi_1} = \frac{d}{x+a},$$

и поэтому

$$\psi = \frac{A_1}{\xi_1}.$$

Тогда ξ_2 определится формулой

$$\xi_2 = \frac{r}{d} \varphi(\xi_1) = \frac{r}{x+a}, \quad (6.54)$$

а выражения (6.50) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_p} &= A_1 \frac{d}{x+a}, & \frac{\bar{U}_1}{U_p} &= A_1 \frac{d}{x+a} f(\xi_2), \\ \frac{\bar{U}_r}{U_p} &= A_1 \frac{d}{x+a} g(\xi_2), & \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2} &= A_1^2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^2 h(\xi_2). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Обратимся теперь ко второму случаю, когда $\bar{U}_1/U_s \ll 1$, т. е. $f\psi \ll \mu$. В этом случае интегральное соотношение импульсов (6.53) приводится к форме

$$\frac{\psi}{\varphi^2} \int_0^\infty f(\xi_2) \xi_2 d\xi_2 = \text{const},$$

откуда следует, что

$$\psi = A_2 \varphi^2.$$

Следовательно, уравнение движения (6.52) сводится к выражению

$$\mu \varphi \frac{d\varphi}{d\xi_1} \left(\xi_2 \frac{df}{d\xi_2} + 2f \right) + A_2 \varphi^5 \left[g \frac{df}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h) \right] = 0.$$

Это дифференциальное уравнение удовлетворяется при всех значениях ξ_1 , если

$$\frac{d\varphi}{d\xi_1} = \text{const } \varphi^4.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \xi_1^{-1/3} = \left(\frac{d}{x+a} \right)^{1/3},$$

и, следовательно,

$$\psi = A_2 \xi_1^{-2/3} = A_2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{2/3}.$$

Тогда ξ_2 описывается соотношением

$$\xi_2 = \frac{r}{d} \varphi(\xi_1) = \frac{r}{d} \left(\frac{d}{x+a} \right)^{1/3} = \frac{r}{[(x+a)d^2]^{1/3}}, \quad (6.56)$$

а выражения (6.50) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_p} &= A_2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{2/3}, & \frac{\bar{U}_1}{U_p} &= A_2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{2/3} f(\xi_2), \\ \frac{\bar{U}_r}{U_p} &= A_2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{2/3} g(\xi_2), & \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_p^2} &= A_2^2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{4/3} h(\xi_2). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Таким образом, можно заключить, что в случае $\bar{U}_1/U_s \gg 1$, который наблюдается, когда скорость U_s мала (или, что возможно, обращается в нуль) по сравнению с \bar{U}_1 , толщина струи зависит от $(x+a)$ по линейному закону, а скорость струи в осевом направлении с увеличением расстояния $(x+a)$ затухает по гиперболическому закону.

Однако когда $\bar{U}_1/U_s \ll 1$, т. е. если скорость U_s велика по сравнению с \bar{U}_1 , то толщина струи пропорциональна $(x+a)^{1/3}$, а скорость струи затухает по закону $\bar{U}_{1, \max}/U_p \sim (x+a)^{-2/3}$.

Если струя вытекает в среду, обладающую постоянной скоростью U_s в осевом направлении, которая мала по сравнению со скоростью истечения струи U_p , то линейное нарастание толщины слоя в зависимости от x и убывание скорости струи по закону обратной пропорциональности x будет наблюдаться лишь на небольших расстояниях от отверстия. Дело в том, что так как скорость U_s постоянна, а скорость струи убывает с увеличением x , то в конце концов наступают такие условия, при которых избыточная скорость струи уже не только не будет большей по сравнению с U_s , но даже может стать малой по сравнению с U_s . Тогда нарастание толщины струи в этой области будет происходить пропорционально $x^{1/3}$. Между двумя этими областями находится переходная область, распределение скорости в которой уже не может более описываться произведением $\xi_2 \psi(\xi_1)$. В этой переходной области наблюдается постепенное ослабление затухания скорости струи, т. е. переход от закона x^{-1} к закону « $x^{-2/3}$ ».

Попытаемся теперь найти в этих двух предельных случаях решения для $f(\xi_2)$, $g(\xi_2)$ и $h(\xi_2)$. В случае $\bar{U}_1/U_s \gg 1$ для удобства можно принять, что $U_s = 0$ и, следовательно, $\mu = 0$, т. е. рассмотреть распространение струи в неподвижной среде.

Случай А. $U_s = 0$. С помощью соотношений (6.55) при $U_s = 0$ уравнение движения (6.49) преобразуется к виду

$$-\left(f^2 + \xi_2 f \frac{df}{d\xi_2} \right) + g \frac{dg}{d\xi_2} = \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h). \quad (6.58)$$

Используя уравнение неразрывности, можно исключить отсюда функцию $g(\xi_2)$. Это уравнение, записанное с помощью функций $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$, выражается следующим образом [см. уравнения (6.50) и (6.51)]:

$$\frac{d\psi}{d\xi_1} f + \frac{\psi}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi_1} \frac{df}{d\xi_2} + \varphi\psi \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 g) = 0.$$

При $\psi = A_1\varphi$ и $\varphi = 1/\xi_1$ получаем

$$-\left(f + \xi_2 \frac{df}{d\xi_2}\right) + \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 g) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 f) = \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 g).$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\xi_2 g = \xi_2^2 f - \int_0^{\xi_2} f \xi_2 d\xi_2.$$

Положим теперь

$$\int_0^{\xi_2} f \xi_2 d\xi_2 = F(\xi_2),$$

так что

$$f = \frac{1}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} \quad \text{и} \quad g = \frac{dF}{d\xi_2} - \frac{1}{\xi_2} F. \tag{6.59}$$

Подстановка в уравнение (6.58) дает

$$-\frac{F}{\xi_2} \frac{d^2 F}{d\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_2} \left(\frac{dF}{d\xi_2}\right)^2 + \frac{F}{\xi_2^2} \frac{dF}{d\xi_2} = \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h),$$

или

$$-\frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{F}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2}\right) = \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h).$$

В результате решения этого дифференциального уравнения получаем

$$\xi_2 h = -\frac{F}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} = -f \int_0^{\xi_2} f \xi_2 d\xi_2. \tag{6.60}$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как при $\xi_2 = 0$ величина h должна быть конечной. Из этой формулы, пользуясь выражением (6.50), находим

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = -\frac{1}{\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \int_0^{\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \xi_2 d\xi_2. \tag{6.61}$$

Выражение для коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ получается из определяющего его соотношения

$$\sigma_{xr} = \rho (\epsilon_m)_{xx} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r}$$

или

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}}.$$

Таким образом, с помощью формулы (6.61) получаем

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} = - \frac{(\bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max}) \int_0^{\xi_2} (\bar{U} / \bar{U}_{1, \max}) \xi_2 d\xi_2}{\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max})}. \quad (6.62)$$

Так как $\bar{U}_{1, \max} (x+a) = \text{const}$, то из уравнения (6.62) следует, что величина $(\epsilon_m)_{xx}$ должна зависеть только от ξ_2 ; поэтому можем записать

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d}.$$

Чтобы вычислить распределение скорости, необходимо принять какое-нибудь предположение относительно $(\epsilon_m)_{xx}$. Опять-таки рассмотрим сначала случай, при котором величина $(\epsilon_m)_{xx}$ постоянна:

$$(\epsilon_m)_{xx} = \text{const}.$$

Вводя функцию $F(\xi_2)$, соотношение (6.62) можно записать следующим образом:

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} = - \frac{(F/\xi_2) (dF/d\xi_2)}{\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{1}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} \right)}$$

или

$$- F \frac{dF}{d\xi_2} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} \xi_2^2 \frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{1}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} \right).$$

Это уравнение легко интегрируется; в результате имеем

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} \left(\xi_2 \frac{dF}{d\xi_2} - 2F \right) = - \frac{1}{2} F^2.$$

Постоянная интегрирования принята здесь равной нулю, так как при $\xi_2 = 0$ функция $F(\xi_2)$ тоже должна обращаться в нуль.

Последующее интегрирование дает

$$F(\xi_2) = \frac{2C\xi_2^2}{1 + [\bar{U}_{1, \max} (x+a)/2 (\epsilon_m)_{xx}] C\xi_2^2},$$

откуда

$$f(\xi_2) = \frac{1}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} = \frac{4C}{\left\{1 + C [\bar{U}_{1, \max}(x+a)/2 (\epsilon_m)_{xx}] \xi_2^2\right\}^2}.$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия, что $f(0) = 1$; отсюда $C = 1/4$. Следовательно,

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \left[1 + \frac{\bar{U}_{1, \max}(x+a)}{8(\epsilon_m)_{xx}} \xi_2^2\right]^{-2}. \quad (6.63)$$

Теория Прандтля переноса импульса

Положим здесь, что

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max}(x+a)} = \frac{l_m^2}{(x+a)^2} \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right|.$$

Выше уже упоминалось, что член в левой части этого уравнения зависит только от ξ_2 . Предположим, что путь смещения l_m является функцией лишь $(x+a)$, т. е.

$$l_m = c_m(x+a).$$

Подставляя полученные выше выражения для $(\epsilon_m)_{xx}/\bar{U}_{1, \max}(x+a)$ и l_m в уравнение (6.62) и вводя функцию $F(\xi_2)$, получаем

$$c_m^2 \left(\frac{d^2F}{d\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_2} \frac{dF}{d\xi_2} \right)^2 = F \frac{dF}{d\xi_2},$$

или, при $\xi_2^* = \xi_2/c_m^{2/3}$,

$$\left(\frac{d^2F}{d\xi_2^{*2}} - \frac{1}{\xi_2^*} \frac{dF}{d\xi_2^*} \right)^2 = F \frac{dF}{d\xi_2^*}.$$

Это уравнение было решено Толмином [10]. Он предположил, что

$$F = \exp \left(\int Z d\xi_2^* \right).$$

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{dZ}{d\xi_2^*} = \frac{Z}{\xi_2^*} - Z^2 - \sqrt{Z}.$$

Это уравнение Толмин решал методом разложения в степенной ряд; таким образом, он получил

$$Z = \frac{2}{\xi_2^*} - \frac{2\sqrt{2}}{7} (\xi_2^*)^{1/2} - \frac{1}{245} (\xi_2^*)^2 + \frac{\sqrt{2}}{1715} (\xi_2^*)^{7/2} + \dots$$

Распределение скорости, выраженное через ξ_2^* , дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} &= f(\xi_2^*) = \frac{1}{\xi_2^*} \frac{dF}{d\xi_2^*} = \\ &= \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{7} (\xi_2^*)^{3/2} - \dots \right] \exp \left[-\frac{4\sqrt{2}}{21} (\xi_2^*)^{3/2} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Из этого выражения следует, что при малых ξ_2^* функция $f(\xi_2^*)$ подчиняется приближенной зависимости

$$f(\xi_2^*) \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\xi_2^*)^{3/2} - \dots \quad (6.64a)$$

Этот результат показывает, что искомая кривая в своей вершине, при $\xi_2^* = 0$, имеет бесконечно большую кривизну.

Теория Тэйлора переноса завихренности

Начнем с уравнения (5.10), которое в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} = \epsilon_\omega \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \right). \quad (6.65)$$

Подставляя сюда величины ξ_2 , $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$ согласно соотношениям (6.54) и (6.55), получаем уравнение

$$-\left(\xi_2 f \frac{df}{d\xi_2} + f^2 \right) + g \frac{df}{d\xi_2} = \frac{\epsilon_\omega}{A_1 U_p d} \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} \left(\xi_2 \frac{df}{d\xi_2} \right).$$

Если для коэффициента вихревой диффузии использовать выражение (5.8) $\epsilon_\omega = \frac{1}{2} l_\omega^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \right|$, полагая в то же время, что $l_\omega = c_\omega (x + a)$, то отсюда получим

$$f \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 f) - g \frac{df}{d\xi_2} = \frac{c_\omega^2}{2} \frac{1}{\xi_2} \frac{df}{d\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} \left(\xi_2 \frac{df}{d\xi_2} \right). \quad (6.66)$$

Решение этого уравнения, полученное Томотика [42] путем разложения в ряд, дает следующее выражение для $\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max}$:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} (\xi_2^*)^{3/2} + \frac{11}{81} (\xi_2^*)^3 - \frac{1363\sqrt{2}}{61236\sqrt{3}} (\xi_2^*)^{9/2} + \dots, \quad (6.67)$$

где $\xi_2^* = \xi_2 (c_\omega^2/2)^{-1/3}$.

Это решение, подобно решению Толмина по теории переноса импульса, приводит к бесконечно большой кривизне профиля скорости в его вершине $\xi_2^* = 0$. Однако решение (6.67) для конечных,

но все же малых значений ξ_2^* дает бóльшую кривизну, нежели решение Толмина.

Случай В. $\bar{U}_1/U_s \ll 1$ и $\bar{U}_r/U_s \ll 1$. В этом случае имеем

$$\mu = \frac{U_s}{U_p} \rightarrow 1$$

и $\psi \ll 1$. Таким образом, в уравнении (6.52) можно пренебречь величиной $f\psi$ по сравнению с μ , а также последним членом в левой части этого уравнения. Тогда, если возвратиться к уравнению (6.49), замечаем, что оно приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{U}_1}{U_s} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma_{xr}}{\rho U_s^2} \right). \quad (6.68)$$

Вводя переменные ξ_2 , $f(\xi_2)$ и $h(\xi_2)$ по формулам (6.56) и (6.57), а также пользуясь предположением о том, что $U_p/U_s \rightarrow 1$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$2f + \xi_2 \frac{df}{d\xi_2} = -3A_2 \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 h). \quad (6.68a)$$

Это уравнение легко интегрируется; в результате имеем

$$\xi_2 f = -3A_2 h.$$

Постоянная интегрирования обращается в нуль вследствие того, что $h(0) = 0$. Таким образом, распределение напряжения сдвига описывается выражением

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = -\frac{1}{3A_2} \xi_2 \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right). \quad (6.69)$$

Ввиду того, что

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} [(x+a)d^2]^{1/3}} \frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right),$$

для коэффициента вихревой диффузии получаем формулу, аналогичную соотношению (6.28):

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} [(x+a)d^2]^{1/3}} = -\frac{1}{3A_2} \frac{\xi_2 \bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max}}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max})}. \quad (6.70)$$

Если $(\epsilon_m)_{xx}$ выразить через U_s вместо $\bar{U}_{1, \max}$, то получится

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{U_s d} = -\frac{1}{3} \frac{\xi_2 \bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max}}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max})} \left(\frac{d}{x+a} \right)^{1/3} = \chi(\xi_2) \xi_1^{-1/3}. \quad (6.70a)$$

В данном случае коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ оказывается функцией не только ξ_2 , но также и $x+a$. Отличный от этого

результат получается для двумерного случая [см. § 6.3, уравнение (6.28)] и для круглой струи при $\bar{U}_1/U_s \gg 1$ [см. случай А, уравнение (6.62)].

Если в соотношении (6.70а) функцию $\chi(\xi_2)$ положить равной постоянной величине, т. е. принять, что $(\epsilon_m)_{xx}$ зависит лишь от расстояния $x + a$, то интегрирование уравнения (6.70а) приводит к гауссову закону ошибок:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp\left(-\frac{1}{6\chi} \xi_2^2\right) = \exp\left[-\frac{U_s d^{1/3}}{6(\epsilon_m)_{xx}(x+a)^{1/3}} \xi_2^2\right]. \quad (6.71)$$

Индуктивная теория Рейхардта

Чтобы воспользоваться индуктивной теорией Рейхардта, нам придется обратиться к уравнению импульсов, которое в пренебрежении членами, связанными с давлением и вязкостью, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{U_x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \overline{U_x U_r} = 0. \quad (6.72)$$

Если принять гипотезу Рейхардта

$$\overline{U_x U_r} = -\mathcal{L} \frac{\partial \overline{U_x^2}}{\partial r},$$

то это уравнение преобразуется в уравнение диффузии. Пусть

$$\overline{U_x^2} = U_s^2 + \overline{\mathfrak{B}^2},$$

где

$$\overline{\mathfrak{B}^2} = 2U_s \bar{U}_1 + \bar{U}_1^2 + \bar{u}_1^2.$$

Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{\mathfrak{B}^2} = \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}^2}}{\partial r} \right). \quad (6.73)$$

Мы убедились, что предположение о подобии профилей скорости справедливо только в двух крайних случаях: в случае А, когда $\bar{U}_1/U_s \gg 1$ (например, $U_s = 0$), и в случае В, когда $U_1/\bar{U}_s \ll 1$. Для случая $U_s = 0$ положим, что

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}^2}}{U_p^2} = \psi_1(\xi_1) f_1(\xi_2),$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются соотношениями (6.51), а

$$\psi_1(\xi_1) = \frac{B_1}{\xi_1^2}.$$

Это выражение находится в соответствии с экспериментально обнаруженным фактом, что скорость на оси струи затухает с увеличением расстояния от воображаемого источника струи по гиперболическому закону. При этом подобие устанавливается, если

$$\frac{\mathcal{L}}{x+a} = \text{const.} \quad (6.74)$$

Тогда функция $f_1(\xi_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathcal{L}}{x+a} \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} \left(\xi_2 \frac{df_1}{d\xi_2} \right) + \xi_2 \frac{df_1}{d\xi_2} + 2f_1 = 0. \quad (6.75)$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $f_1 = 1$ при $\xi_2 = 0$, описывается гауссовым законом ошибок

$$f_1 = \exp \left(-\frac{x+a}{2\mathcal{L}} \xi_2^2 \right).$$

Отсюда

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_p^2} = B_1 \left(\frac{d}{x+a} \right)^2 \exp \left(-\frac{x+a}{2\mathcal{L}} \xi_2^2 \right). \quad (6.76)$$

В случае В, когда $\bar{U}_1/U_s \ll 1$, выражение для $\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_s^2}$ упрощается:

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_s^2} \approx 2 \frac{\bar{U}_1}{U_s},$$

и тогда уравнение (6.73) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{U}_1}{U_s} = \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{U}_1/U_s}{\partial r} \right).$$

Это выражение в точности совпадает с уравнением (6.68), которое при постоянном коэффициенте вихревой диффузии приводит к решению типа кривой Гаусса (6.71). В данном случае решение типа Гаусса записывается в форме

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}^2}{U_s^2} = 2 \frac{\bar{U}_1}{U_s} = 2A_2 \left(\frac{d}{x+a} \right)^{2/3} \exp \left[-\frac{d^{4/3}}{6\mathcal{L}(x+a)^{1/3}} \xi_2^2 \right],$$

где $\mathcal{L}(x+a)^{1/3}d^{4/3} = \text{const.}$ Как было обнаружено выше для случая следа за цилиндром, связь между \mathcal{L}/d и $(\epsilon_m)_{xx}/U_s d$ определяется формулой $\mathcal{L}U_s = (\epsilon_m)_{xx}$.

Другие теоретические исследования

Общая задача о круглой струе, вытекающей в параллельный поток, была теоретически рассмотрена Сквайром и Траунсером [11], а Бай [12] провел теоретическое исследование этой задачи для предельного случая $\bar{U}_1/\bar{U}_s \ll 1$ в предположении о том, что коэффициент

вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ зависит лишь от ξ_1 и постоянен в поперечном сечении струи.

В своей теории Сквайр и Траунсер использовали только интегральное соотношение импульсов. Поскольку для распределения скорости в любом поперечном сечении ими была принята определенная функция (а именно косинусоида), то отпала и необходимость в решении уравнения движения. Таким образом, эти авторы ввели предположение о подобии распределения скорости в последовательно расположенных поперечных сечениях струи. Однако выше было показано, что это предположение находится в противоречии с уравнением движения, по крайней мере в общем случае, когда скорость струи и скорость окружающей среды одинаковы по порядку величины.

Предположение о том, что профиль скорости описывается косинусоидой, приводит к конечной толщине струи. Эта толщина является неизвестным параметром теории. Второй неизвестный параметр — скорость на оси струи в зависимости от x . Если интегральное соотношение импульсов применить не только к полной струе, но и к части струи, заключенной в пределах ее полутолщины, то получается второе уравнение, которое может быть решено относительно двух неизвестных параметров (толщины струи и скорости на оси струи) как функций от x . Во второе соотношение импульсов входит напряжение сдвига на расстоянии от оси струи, равном половине ее толщины. Чтобы выразить его через распределение скорости, Сквайр и Траунсер воспользовались прандтлевской гипотезой пути смещения.

§ 6.8. Перенос скалярной субстанции в круглой свободной струе

Уравнение переноса субстанции $\bar{\Gamma}$ в цилиндрических координатах с учетом предположений, принятых для свободных турбулентных потоков, записывается в виде

$$\bar{U}_x \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u_r \gamma}). \quad (6.77)$$

Будем, как и прежде, считать, что турбулентный перенос субстанции Γ можно описать с помощью диффузионного тензора $(\epsilon_\gamma)_{ij}$. Тогда с той же степенью приближения величина $\overline{u_r \gamma}$ выразится формулой

$$-\overline{u_r \gamma} \doteq (\epsilon_\gamma)_{rr} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial r}. \quad (6.78)$$

Введя обозначения: $\bar{U}_x = U_s + \bar{U}_1$, $\bar{\Gamma} = \Gamma_s + \bar{\Gamma}_1$, U_p — скорость истечения, Γ_p — величина Γ для вытекающей жидкости, преобразуем

уравнение переноса следующим образом:

$$\left(\frac{U_s}{U_p} + \frac{\bar{U}_1}{U_p}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{\Gamma}_1}{\Gamma_p} + \frac{\bar{U}_r}{U_p} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\bar{\Gamma}_1}{\Gamma_p} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{U_p} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\bar{\Gamma}_1}{\Gamma_p} \right]. \quad (6.79)$$

Если принять предположение о подобии профилей $\bar{\Gamma}_1$ и \bar{U}_1 в последовательно расположенных поперечных сечениях, то при решении этого уравнения возникнут те же трудности, что и при решении уравнения для распределения скорости. Решения, основанные на предположении о полном подобии, могут быть получены лишь в случаях

$$\bar{U}_1/U_s \gg 1 \quad \text{и} \quad \bar{U}_1/U_p \ll 1, \quad U_s/U_p \approx 1.$$

В случае $\bar{U}_1/U_p \ll 1$ при условии $\bar{U}_r/U_p \ll 1$ постоянная величина коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ приводит к решению типа Гаусса, аналогичному решению (6.71).

Таким образом, остается рассмотреть лишь случай $\bar{U}_1/U_s \gg 1$, например предельный случай $U_s = 0$. Из требования подобия вытекает, что можно положить

$$\frac{\bar{\Gamma}_{1, \max}}{\Gamma_p} = C_1 \frac{d}{x+a}, \quad \frac{\bar{\Gamma}_1}{\Gamma_p} = C_1 \frac{d}{x+a} k(\xi_2), \quad (6.80)$$

где $\xi_2 = r/(x+a)$.

Предположим, что кажущийся источник a для субстанции Γ_1 совпадает с источником для скорости U_1 . Если, помимо этого, воспользоваться соответствующими соотношениями (6.55) для \bar{U}_1/U_p и \bar{U}_r/U_p , то уравнение (6.79) при $U_s = 0$ приведет к виду

$$-f \frac{d}{d\xi_2} (\xi_2 k) + g \frac{dk}{d\xi_2} = \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} \left[\xi_2 \frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} \frac{dk}{d\xi_2} \right]. \quad (6.81)$$

Подставим теперь сюда вместо функций $f(\xi_2)$ и $g(\xi_2)$ их выражения (6.59), содержащие функцию $F(\xi_2)$. Тогда уравнение (6.81) запишется следующим образом:

$$-\frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} (Fk) = \frac{1}{\xi_2} \frac{d}{d\xi_2} \left[\xi_2 \frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} \frac{dk}{d\xi_2} \right].$$

Это уравнение поддается интегрированию. Так как постоянная интегрирования в силу граничных условий должна обращаться в нуль, то это решение имеет вид

$$F(\xi_2) k(\xi_2) = -\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} \xi_2 \frac{dk}{d\xi_2}. \quad (6.82)$$

Последующее интегрирование дает

$$k(\xi_2) = \frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} = \exp \left[-\int_0^{\xi_2} \frac{A_1 U_p d}{(\epsilon_\gamma)_{rr}} F(\xi_2) \frac{d\xi_2}{\xi_2} \right]. \quad (6.83)$$

Таким образом, распределение $\bar{\Gamma}_1$ выражается непосредственно через распределение скорости и может быть вычислено, если известны распределение скорости и коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$.

Преобразуем выражение (6.83), выразив распределение скорости через коэффициент вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$. Из соотношения (6.62) получается следующий результат:

$$\frac{F(\xi_2)}{\xi_2} = - \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d} \frac{1}{f(\xi_2)} \frac{df}{d\xi_2} = - \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d} \frac{d}{d\xi_2} \left(\ln \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right).$$

Следовательно, выражение (6.83) принимает вид

$$\frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} = \exp \left[\int_0^{\xi_2} \frac{(\epsilon_m)_{xx}}{(\epsilon_\gamma)_{rr}} \frac{d}{d\xi_2} \left(\ln \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right) d\xi_2 \right]. \quad (6.84)$$

Если отношение $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}$ не зависит от ξ_2 , то это выражение оказывается идентичным выражению (6.42), полученным для течения в следе за цилиндром.

Теория Прандтля пути смещения

Постоянство отношения $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}$, о котором идет речь, принимается, например, при использовании прандтлевской гипотезы пути смещения, ибо в этом случае

$$\frac{(\epsilon_m)_{xx}}{A_1 U_p d} = c_m^2 \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right|, \quad \frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} = c_\gamma^2 \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right|$$

и, следовательно, $(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr} = c_m^2/c_\gamma^2$.

Тогда соотношение (6.84) преобразуется к форме

$$\frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} = \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right)^{c_m^2/c_\gamma^2}. \quad (6.85)$$

Таким образом, при $c_m = c_\gamma$ распределение $\bar{\Gamma}_1$ одинаково с распределением скорости.

Теория Тэйлора переноса завихренности

Если распределение скорости вычислять по видоизмененной теории Тэйлора переноса завихренности, то окончательный результат оказывается отличным от выражений (6.84) и (6.85). Введем в выражение (6.83) величину

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{A_1 U_p d} = c_\gamma^2 \left| \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right|.$$

Тогда (6.83) с помощью соотношения (6.59) преобразуется к виду

$$\frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} = \exp \left[\frac{1}{c_\gamma^2} \int_0^{\xi_2} \frac{\xi_2 (1/\xi_2) \int_0^{\xi_2} (\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max}) \xi_2 d\xi_2}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max})} d\xi_2 \right].$$

Решение (6.67) для распределения скорости, полученное Томотика [42], выражается через переменную $\xi_2^* = \xi_2 (c_\omega^2/2)^{-1/3}$. Если ввести эту новую переменную, то выражение для $\bar{\Gamma}_1/\bar{\Gamma}_{1, \max}$ примет вид

$$\frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} = \left\{ \exp \left[\int_0^{\xi_2^*} \frac{\xi_2^* (1/\xi_2^*) \int_0^{\xi_2^*} \bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max} \xi_2^* d\xi_2^*}{\frac{d}{d\xi_2^*} (\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max})} d\xi_2^* \right] \right\}^{c_\omega^2/2c_\gamma^2}. \quad (6.86)$$

Этот интеграл был вычислен Хауэртом [13], который для $\bar{U}_1/\bar{U}_{1, \max}$ использовал выражение (6.67), а также принял предположение о том, что $c_\omega^2/2c_\gamma^2 = 1$.

Индуктивная теория Рейхардта

Наконец, обратимся к индуктивной теории Рейхардта. Если пренебречь молекулярными эффектами, то получается следующее приближенное уравнение переноса субстанции Γ :

$$U_x \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + U_x \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) = 0.$$

Если к левой части этого уравнения прибавить величину

$$\Gamma \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right) = 0$$

и произвести осреднение по времени, то получится

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{U_x \Gamma} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{U_r \Gamma}) = 0.$$

Следуя Рейхардту, предположим [см. формулу (5.25)], что

$$\overline{U_r \Gamma} = -\mathcal{L}_\gamma \frac{\partial}{\partial r} \overline{U_x \Gamma}. \quad (6.87)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{U_x \Gamma} = \mathcal{L}_\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \overline{U_x \Gamma} \right). \quad (6.88)$$

Обозначая

$$U_x = U_s + \bar{U}_1 + u_1, \quad \Gamma = \Gamma_s + \bar{\Gamma}_1 + \gamma,$$

имеем

$$\overline{U_x \Gamma} = U_s \Gamma_s + U_s \bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s \bar{U}_1 + \bar{U}_1 \bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1 \gamma}. \quad (6.89)$$

Так как величина $U_s \Gamma_s$ постоянна, то остается рассмотреть сумму только последних четырех членов в правой части уравнения (6.89). Использование предположения о подобии в последовательно расположенных сечениях струи применительно к распределениям импульса и Γ в тех случаях, для которых это предположение справедливо, приводит к решению типа Гаусса для величины

$$\bar{U}_1 \bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1 \gamma}, \quad \text{если } U_s = \Gamma_s = 0$$

при

$$\frac{\mathcal{L}_\gamma}{x+a} = \text{const},$$

и для величины

$$U_s \bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s \bar{U}_1, \quad \text{если } \bar{U}_1/U_s \ll 1 \text{ и } \bar{\Gamma}_1/\Gamma_s \ll 1$$

при

$$\mathcal{L}_\gamma \frac{(x+a)^{1/3}}{d^{1/3}} = \text{const}.$$

Следовательно, здесь снова необходимо подчеркнуть, что только во втором случае ($\bar{U}_1/U_s \ll 1$; $\bar{\Gamma}_1/\Gamma_s \ll 1$) теория Рейхардта приводит к гауссову распределению для осредненной скорости \bar{U}_1 и субстанции $\bar{\Gamma}_1$. Но в другом случае гауссово распределение применимо лишь к потоку импульса $\rho \bar{\mathfrak{B}}^2$ и к величине $(U_s \bar{\Gamma}_1 + \Gamma_s \bar{U}_1 + \bar{U}_1 \bar{\Gamma}_1 + \overline{u_1 \gamma})$.

§ 6.9. Измерение распределения осредненной скорости и осредненной температуры в круглой свободной струе

Круглая свободная струя являлась объектом многочисленных экспериментальных исследований. Большинство из них относилось к струе, вытекающей в неподвижную окружающую жидкость, и лишь незначительная часть — к более общему случаю струи в спутном потоке. Пожалуй, впервые систематическое исследование струи в спутном потоке было проведено Форстоллом и Шапиро [14–16]. Аналогичные опыты были несколько позже поставлены Ачария [17], а также Александром, Кивником, Камингсом и Генце [34].

Форстолл и Шапиро получили эмпирические зависимости толщины струи и затухания ее скорости от расстояния до сопла при различных значениях отношения μ скорости спутного потока U_s к скорости истечения струи U_p .

Непосредственно за соплом зона турбулентного смешения имеет нулевую толщину; толщина этой зоны возрастает с увеличением расстояния от сопла вплоть до такого значения x_c , при котором зона смешения занимает целиком всю струю (см. рис. 6.16). Если распределение скорости на выходе из сопла равномерно (всегда можно добиться, чтобы действительное распределение было достаточно близко к равномерному), то скорость на оси сохраняет свое постоянное значение U_p вплоть до этого расстояния x_c . Поэтому часто говорят, что вплоть до x_c струя имеет в центре потенциальное ядро. Дальше вниз по потоку от сопла скорость на оси струи с увеличением расстояния уменьшается. На некотором расстоянии течение в струе становится полностью развитым и картины течения в последовательно расположенных сечениях оказываются подобными. К этой полностью развитой части струи применимы теории, рассмотренные выше. Переходный участок между ядром и полностью развитой турбулентной областью обычно довольно мал.

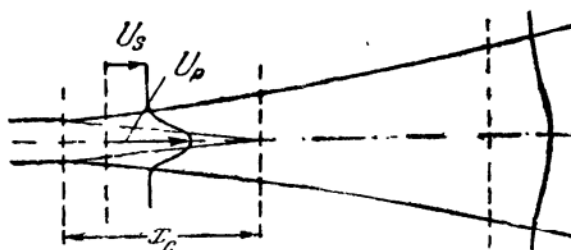


Рис. 6.16. Распределение скорости в области потенциального ядра и дальше вниз по потоку от сопла.

Протяженность области ядра x_c определяется главным образом величиной $\mu = U_s/U_p$; она возрастает с увеличением μ . Согласно Форстоллу [14], справедливо следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{x_c}{d} = 4 + 12\mu. \quad (6.90)$$

В опытах Форстолла измерения производились в диапазоне $\mu \approx 0,2 \div 0,5$. Очевидно, что в случаях, которые значительно отличаются от рассмотренных в этих опытах, соотношением (6.90) пользоваться нельзя. Из (6.90) следует, что при $\mu = 0$ имеем $x_c = 4d$, однако опыты со свободными струями, вытекающими в неподвижную окружающую жидкость, дают значительно большие величины x_c (см. ниже).

Согласно результатам измерений Форстолла, относительная скорость на оси струи с возрастанием x уменьшается по гиперболическому закону:

$$\frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_p - U_s} = \frac{x_c}{x}, \quad x > x_c. \quad (6.91)$$

Для изменения толщины струи («половинного радиуса» $r_{1/2}$) Форстолл получил формулу

$$\frac{2r_{1/2}}{d} = \left(\frac{x}{x_c}\right)^{1-\mu}, \quad x > x_c. \quad (6.92)$$

Эти два результата оказываются не полностью совместимыми друг с другом, если их рассматривать в свете теории, изложенной в предыдущих разделах. Эмпирический гиперболический закон (6.91) затухания осредненной скорости по оси струи, как видим, применяется даже для очень больших расстояний от сопла (при $\mu = 0,5$ Форстолл производил измерения в диапазоне изменения x от 0 до $120d$). Но если бы это было так, то толщина струи с увеличением x должна была бы нарастать по линейному закону, а не по соотношению (6.92). Поэтому, исходя из интегрального соотношения импульсов, следует признать, что формула (6.92) не согласуется с (6.91); во всяком случае, это действительно так, если профили скорости в поперечных сечениях струи подобны. Но, согласно измерениям Форстолла, профили скорости практически оказываются подобными, если в каждом сечении скорость относить к $\bar{U}_{1, \max}$, а радиальную координату — к «половинному радиусу».

Форстолл произвел сравнение профилей измеренной скорости с косинусоидой, рекомендованной Сквайром и Траунсером [11], а также с гауссовой кривой ошибок. На основании этого сравнения он пришел к выводу, что для центрального участка струи лучшее согласие с измеренным распределением дает гауссова кривая ошибок.

Для вычисления напряжения сдвига в струе Сквайр и Траунсер воспользовались прандтлевской теорией переноса импульса и приняли, что

$$\sigma_{xr} = \rho c'^2 r_0^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \right| \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial r} \right|,$$

где величина r_0 — ордината границы струи. Форстолл по своим измерениям получил для случаев $\mu = 0,2$ и $\mu = 0,5$ значение $c' = 0,083$. Постоянная c' не совпадает с постоянной пути смещения c_m в теории Прандтля. Связь между c' и c_m при линейном законе нарастания толщины струи выражается формулой $c_m = c' r_0 / (x + a)$. Так как отношение $r_0 / (x + a)$ примерно равно 0,2, то для c_m получается значение $\sim 0,0165$.

Согласно эмпирической формуле (6.92), струя прекращает утолщаться, когда величина μ достигает значения 1. Это представляется логичным при условии, что как в первичном, так и во вторичном потоке турбулентность отсутствует вовсе. В то же время, согласно теории возмущений, нарастание толщины струи в предельном случае $\mu \rightarrow 1$ оказывается пропорциональным $x^{1/3}$ [см. соотношение (6.56)].

Это кажущееся противоречие можно объяснить следующим образом. Результат Форстолла справедлив только для того предельного случая, когда турбулентность в первичном и вторичном потоках действительно отсутствует, тогда как результат теории возмущений справедлив лишь в том случае, когда для возбуждения турбулентности (обуславливающей турбулентное распространение первичного потока)

вполне достаточно любого малого различия между первичным и вторичным потоками.

Форстолл и Шапиро [15] произвели измерения в струе смеси воздуха с гелием, вытекающей в воздух. Оказалось, что распределение концентрации в поперечном сечении струи удовлетворительно описывается косинусоидой или гауссовой кривой ошибок. Распространение концентрации оказалось больше, нежели распространение осевой компоненты импульса. Применительно к теории Сквайра и Траунсера эти авторы получили для коэффициента c'_γ , соответствующего коэффициенту c' , значение 0,1. Если это значение сравнить с величиной коэффициента c' , то получим отношение коэффициентов вихревой диффузии

$$\frac{(\epsilon_\gamma)_{rr}}{(\epsilon_m)_{xx}} = \frac{c'^2_\gamma}{c'^2} \approx 1,4.$$

Это отношение равно обратной величине турбулентного числа Шмидта,

Лэндис и Шапиро [18] аналогичными опытами с нагретой струей, вытекающей в спутный поток, показали, что такие же количественные результаты получаются и для распространения тепла. Александер, Кивник, Камингс и Генце при анализе результатов своих опытов по распространению струи нагретого воздуха в спутном воздушном потоке воспользовались гипотезой Рейхардта. При этом оказалось, что $\mathcal{L}_\gamma/\mathcal{L} \approx 4/3$; это отношение эквивалентно отношению $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$. Ачария [17] получил, в общих чертах, такой же результат, что и Лэндис и Шапиро. По его данным, отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$, по-видимому, зависит от μ , но получить какого-либо определенного закона для этой зависимости не удалось, так как значения, найденные для $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ и $(\epsilon_m)_{rr}$ как функций μ , оказались плохо согласующимися друг с другом.

Более многочисленные и широкие исследования были проведены применительно к свободной струе, вытекающей в неподвижную окружающую жидкость. Среди них можно отметить исследования по газовым струям, вытекающим в воздух, которые были выполнены Трюпелем [19], Руденом [20], Рейхардтом [1], Корсином [21], Корсином и Юбероем [22, 23], Альбертсоном, Даем, Йенсоном и Роузом [25], Александером, Бэроном и Камингсом [28] и Хинце и Ван дер Хегге Цийненом [24]. Форстоллом и Гейлордом [26] были проведены опыты по затопленным водяным струям.

Между экспериментальными результатами, полученными различными исследователями, имеется, вообще говоря, удовлетворительное согласие. При $x > x_c$ наблюдается линейное утолщение струи и гиперболический закон затухания осевой скорости струи с увеличением расстояния от некоторого воображаемого источника, а также весьма хорошее подобие распределений скорости в последовательно

расположенных поперечных сечениях. Согласно результатам измерений Ван дер Хегге Цийнена, $x_c \approx (6 \div 8)d$. Вообще говоря, эта величина немного зависит от формы насадка (сопло с затупленной или острой кромкой, круглая труба и т. д.). Но при $x > x_c$ форма насадка практически не оказывает влияния на распределение скорости.

Как и следовало ожидать, наблюдается также влияние числа Рейнольдса. Однако, с увеличением числа Рейнольдса это влияние ослабевает, и при значениях $Re_d = U_p d / \nu$, превышающих 10^5 , им практически можно пренебречь.

Сравнение теоретического радиального распределения осевой компоненты скорости, вычисленного по теории переноса импульса и видоизмененной теории переноса завихренности, с измеренным распределением дает почти такую же картину, как и в случае следа за цилиндром. Обе теории приводят к слишком заостренной вершине кривой распределения скорости на оси струи. Теория переноса импульса дает несколько меньшее отклонение от измеренного распределения, чем видоизмененная теория переноса завихренности. Вблизи границы струи это отклонение, особенно в случае видоизмененной теории переноса завихренности, оказывается весьма ощутимым.

Если вычисленное и измеренное распределения скорости совместить в точке $(\xi_2)_{1/2}$, соответствующей «половинному радиусу» (согласно измерениям Ван дер Хегге Цийнена [24] $(\xi_2)_{1/2} = 0,08$), то величина пути смещения в теории переноса импульса будет равна

$$l_m = c_m(x + a) = 0,017(x + a).$$

Величина, соответствующая видоизмененной теории переноса завихренности, составляет

$$l_\omega = c_\omega(x + a) = 0,018(x + a).$$

Если сравнить эти величины с «половинным радиусом» $r_{1/2} = 0,08 \times (x + a)$, то соответственно получится $l_m = 0,21r_{1/2}$ и $l_\omega = 0,225r_{1/2}$. Как и в случае течения в следе, приведенные величины пути смещения отнюдь не малы по сравнению с толщиной зоны смещения.

Гауссова кривая ошибок весьма точно согласуется с опытными данными практически во всем поперечном сечении струи. Правда, вблизи вершины кривой распределения скорости она дает слегка завышенные, а в приграничной зоне — несколько заниженные значения. На рис. 6.17 гауссова кривая ошибок изображена вместе с экспериментальной кривой, полученной Ван дер Хегге Цийненом, который проводил опыты со струей, вытекающей из сопла диаметром 2,5 см с начальной скоростью 40 м/сек. Осевая компонента скорости измерялась в этих опытах с помощью миниатюрной трубки полного напора. В показания трубки вносились поправки, учитывающие влияние турбулентности; при этом принималось весьма сомни-

тельное допущение о том, что влияние турбулентности определяется только осевой компонентой турбулентных пульсаций скорости (см. § 2.11).

Как уже упоминалось, при $x_c > (6 \div 8)d$ распределения скорости в поперечных сечениях струи подобны, а скорость на оси струи убывает обратно пропорционально расстоянию $(x + a)$, т. е.

$$\frac{\bar{U}_{1, \max}}{U_p} = 6,4 \frac{d}{x + a}.$$

Александр, Бэрон и Камингс [28] методом, аналогичным использованному Ван дер Хегге Цийненом, измерили поток импульса $\rho \bar{U}_x^2$ в струе с помощью трубки полного напора. Для радиального распределения этой величины они получили удовлетворительное совпадение с гауссовой кривой ошибок во всем поперечном сечении струи.

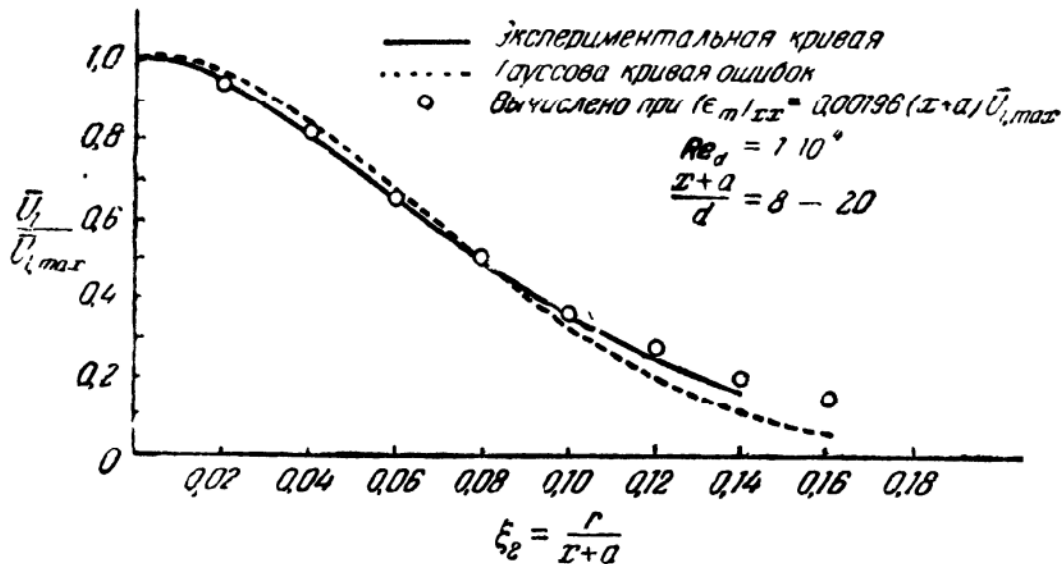


Рис. 6.17. Радиальное распределение скорости в круглой свободной струе.

На рис. 6.17 нанесены также значения, вычисленные в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_m)_{xx}$ [см. формулу (6.63)]. Эти расчетные значения лучше согласуются с экспериментальной кривой, особенно в центральной части струи; вблизи границ струи эти значения оказываются несколько завышенными. Величина коэффициента вихревой диффузии, использованная в этих расчетах, составляет

$$(\epsilon_m)_{xx} = 0,00196 \bar{U}_{1, \max} (x + a),$$

или, будучи выраженной через $U_p d$,

$$(\epsilon_m)_{xx} = 0,013 U_p d$$

(ср. с соответствующей величиной для течения в следе за цилиндром). При скорости истечения $U_p = 40$ м/сек и $d = 2,5$ см получаем $(\epsilon_m)_{xx} = 130$ см²/сек, что примерно в 1000 раз превышает величину кинематического коэффициента вязкости для воздуха при атмосферных условиях.

Можно отметить, что так как величина $(\epsilon_m)_{xx}$ пропорциональна корню квадратному из потока импульса струи, то процесс смешения в струе в целом определяется величиной потока импульса.

Если величину $(\epsilon_m)_{xx}$ вычислить непосредственно по радиальному распределению скорости, приведенному на рис. 6.17, пользуясь для этого соотношением (6.62), то эта величина, как показано на рис. 6.18, получается почти постоянной в центральной части струи.

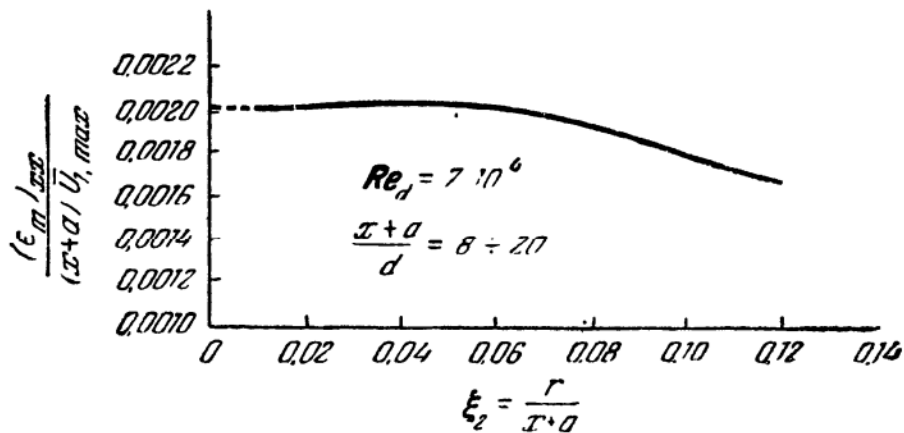


Рис. 6.18. Распределение коэффициента вихревой вязкости, вычисленное по кривой радиального распределения скорости, приведенной на рис. 6.17.

Принимая постоянное значение $(\epsilon_m)_{xx}$ в основной части поперечного сечения струи, и, следовательно, распределение скорости по уравнению (6.63), получаем следующее распределение напряжения сдвига [см. уравнение (6.61)]:

$$\frac{\sigma_{xr}}{\rho \bar{U}_{1, \max}^2} = -\frac{1}{2} \xi_2 \left[1 + \frac{\bar{U}_{1, \max} (x+a)}{8 (\epsilon_m)_{xx}} \xi_2^2 \right]^{-3}. \quad (6.93)$$

Напряжение сдвига при

$$(\xi_2)_{\text{опт}} = \left[\frac{8 (\epsilon_m)_{xx}}{5 \bar{U}_{1, \max} (x+a)} \right]^{1/2}$$

принимает максимальное значение. Поскольку

$$(\xi_2)_{1/2} = \left[\frac{8 (\sqrt{2} - 1) (\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{1, \max} (x+a)} \right]^{1/2},$$

то, как и в случае следа за цилиндром, величина $(\xi_2)_{\text{опт}}$ меньше, чем $(\xi_2)_{1/2}$. При эмпирическом значении $(\epsilon_m)_{xx} / \bar{U}_{1, \max} (x+a) = 0,00196$,

определенном по опытам Ван дер Хегге Цийнена, получаем $(\xi_2)_{\text{опт}} = 0,056$ и $(\xi_2)_{1/2} = 0,08$.

Опыты с нагретыми струями проводились Руденом [20], Корсином [21], Корсином и Юбероем [22, 23], а также Хинце и Ван дер Хегге Цийненом [24], которые также исследовали распространение трассирующего газа (городского газа, H_2 , CO_2 и CH_4) в изотермической струе. Во всех этих опытах разности температур и концентраций были достаточно малы, благодаря чему заметного влияния разницы плотностей не проявлялось. Хинце и Ван дер Хегге Цийнен показали, что в этом случае не наблюдается никакого различия в распространении тепла и вещества; если распространение этих субстанций описывать с помощью коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$, то величины этого коэффициента для тепла и для вещества оказываются одинаковыми.

Распространение тепла и вещества значительно больше, чем распространение импульса. Ван дер Хегге Цийнен получил среднее для поперечного сечения струи значение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} \approx 1,36$. Величина этого отношения, найденная Руденом для нагретой струи, составляет 1,32. Корсин в опытах с нагретыми струями получил для этого отношения величину 1,43, не зависящую от разности температур вплоть до начальной избыточной температуры 300°C . Все значения $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ примерно совпадают с величиной 1,38, найденной Киджи и Уэллером [27] для изотермической струи чистого азота, вытекающей в неподвижный воздух, и с величиной 1,4, о которой упоминалось выше в связи с опытами Форстола со струями, вытекающими в движущуюся жидкость.

Заметим, что значение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} \approx 1,4$, полученное для круглой струи, намного ниже соответствующей величины 1,85, найденной для двумерного течения в следе за цилиндром. Величина, приблизительно равная 1,85, была также получена Рейхардтом [1] в случае плоской струи, вытекающей в неподвижную атмосферу*).

Ниже мы рассмотрим лишь результаты опытов Ван дер Хегге Цийнена. На расстояниях, превышающих x_c , распределение концентрации вдоль оси струи близко к гиперболической зависимости $\bar{\Gamma}_{1, \text{max}}/\Gamma_p = 5,27(x + a)$. Величина a здесь несколько выше, чем для распределения скорости, а именно $0,8d$ вместо $0,6d$.

Однако распределение осевой температуры заметно отклоняется от гиперболической зависимости. Видимо, разница плотностей, обусловленная процессом охлаждения при перемешивании с холодным окружающим воздухом, не оказывая заметного влияния на радиальное

*) Аналогично Ван дер Хегге Цийнен по результатам опытов с плоской свободной струей [Appl. Sci. Res., 7A, 277 (1958)] получил среднее значение, такое же по порядку величины; при этом локальное значение в поперечном сечении струи изменялось от 1,7 до 2,4.

распределение температуры, все же влияет на распределение температуры вдоль оси струи. Как и следовало ожидать, температура струи падает в осевом направлении быстрее, нежели по гиперболическому закону. Когда начальная температура струи превышала температуру окружающего воздуха на 30°C , отклонение от гиперболического закона составляло всего лишь несколько процентов.

Если измеренное радиальное распределение температуры или концентрации сравнивать с распределением $\bar{\Gamma}_1$ по теории переноса импульса и по видоизмененной теории переноса завихренности, то между ними обнаруживаются те же расхождения, что и в случае следа за цилиндром.

По данным Ван дер Хегге Цийнена путь смешения в теории переноса импульса составляет

$$l_\gamma = c_\gamma (x + a) = 0,02 (x + a),$$

а в видоизмененной теории переноса завихренности

$$l_\gamma = 0,0234 (x + a).$$

Распределение субстанции $\bar{\Gamma}_1$, вычисленное в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ при постоянном коэффициенте вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$ для распределения скорости, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Gamma}_1}{\bar{\Gamma}_{1, \max}} &= \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} \right)^{(\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}} = \\ &= \left[1 + \frac{\bar{U}_{1, \max} (x + a)}{8 (\epsilon_m)_{xx}} \xi_2^2 \right]^{-2 (\epsilon_m)_{xx}/(\epsilon_\gamma)_{rr}}. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Это выражение лучше всего согласуется с измеренным распределением при $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx} = 1,36$. Тогда соответствующая величина $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ выразится соотношением $(\epsilon_\gamma)_{rr} = 0,00266 \bar{U}_{1, \max} (x + a)$. Однако, как можно заключить из рассмотрения рис. 6.19, это согласование не столь удовлетворительно, как для распределения скорости, вычисленного при постоянном значении $(\epsilon_m)_{xx}$. На рис. 6.19 нанесена также гауссова кривая ошибок; она вполне удовлетворительно описывает действительное экспериментальное распределение во всем поперечном сечении струи.

Из того факта, что постоянная величина коэффициента вихревой диффузии $(\epsilon_\gamma)_{rr}$ в случае распределения $\bar{\Gamma}_1$ не дает такого же результата, как постоянная величина коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$ для распределения скорости, можно сделать вывод о том, что отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ определено не сохраняет постоянного значения в поперечном сечении струи, даже в центральной части ее. Это отношение, вычисленное по экспериментальным распределениям $\bar{\Gamma}_1$

и \bar{U}_1 , показано на рис. 6.20; как видим, по направлению от центра струи к ее границе оно монотонно убывает.

Данные Форстолла и Гейлорда [26] для осевого и радиального распределений скорости в затопленной струе воды хорошо согласуются с данными Хинце и Ван дер Хегге Цийнена. Путем введения

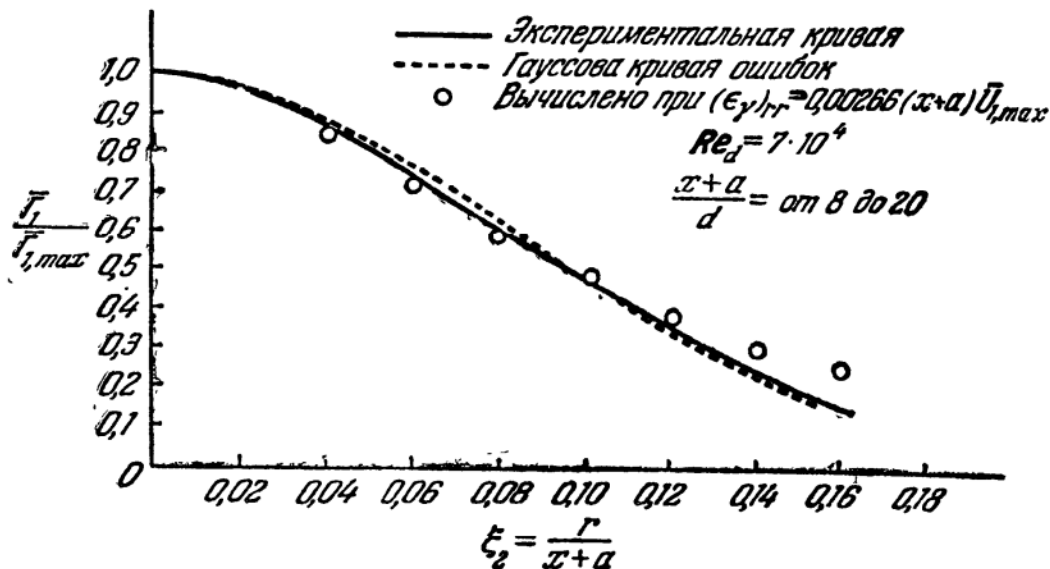


Рис. 6.19. Радиальное распределение \bar{U}_1 в круглой свободной струе.

в струю жидкости в качестве трассирующего вещества поваренной соли удалось исследовать распространение вещества в струе. Полученные при этом данные об осевом распределении согласуются

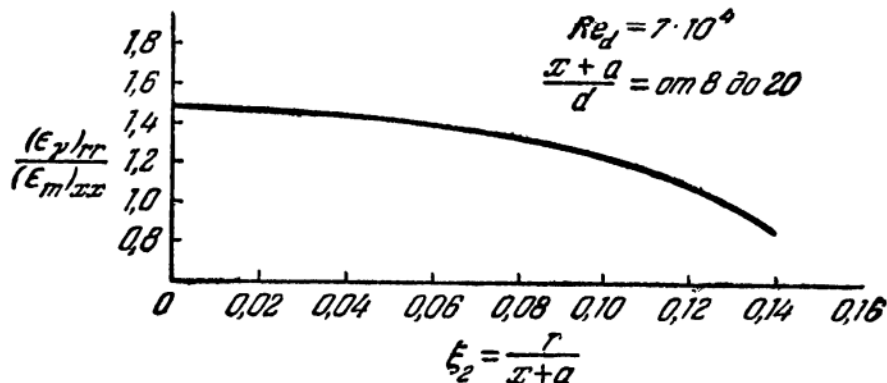


Рис. 6.20. Изменение величины $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$ в круглой свободной струе.

с данными Хинце и Ван дер Хегге Цийнена для газовых струй, однако между результатами этих опытов в отношении радиального распределения имеется некоторое различие. Отношение $(\epsilon_\gamma)_{rr}/(\epsilon_m)_{xx}$, определенное по опытным данным Форстолла и Гейлорда, лежит в пределах от 1,2 до 1,3.

В теориях свободных турбулентных потоков предполагается, что изменение статического давления в поперечном сечении зоны смешения

пренебрежимо мало. Это предположение основано на том факте, что радиальная компонента осредненной скорости мала по сравнению с осевой. Дополнительным подтверждением этого предположения являются расчеты Толмина [10]. В центральной части струи направление осредненной скорости несколько отклоняется наружу, тогда как во внешней части струи наблюдается течение, направленное к ее оси. Следовательно, во внешней области струи следует ожидать минимума статического давления. На основании своих расчетов для круглой свободной струи Толмин получил следующие соотношения:

$$\bar{P}_c - \bar{P}_{r^*} = +0,0012 \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}_{1, \max}^2 \right), \quad \bar{P}_c - P_0 = +0,00075 \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}_{1, \max}^2 \right),$$

где \bar{P}_c , \bar{P}_{r^*} и P_0 — величины статического давления соответственно в центре струи, на ее средней границе и в невозмущенной наружной области.

Эти соотношения показывают, что изменение статического давления в поперечном сечении струи и в самом деле очень мало.

Однако Толмин не рассматривал влияния турбулентности на изменение статического давления в сечении струи. Приведенные в § 6.2 оценки порядков величин различных членов уравнения движения для радиального направления показывают, что указанные изменения статического давления должны быть по порядку своей величины больше, чем изменения, обусловленные осредненными скоростями. Изменение статического давления под действием турбулентности определяется уравнением (6.16) или его интегральной формой (6.16а). Хотя изменение $u'_r/\bar{U}_{1, \max}$ в сечении струи известно, но никаких данных об изменении $u'_\varphi/\bar{U}_{1, \max}$ не имеется; поэтому вычислить разность статических давлений $\bar{P} - P_0$ по уравнению (6.16а) не представляется возможным. Однако если учитывать лишь влияние $\overline{\rho u_r'^2}$, то по величине $u'_r/\bar{U}_{1, \max}$, изображенной на рис. 6.24, можно получить следующую формулу:

$$\bar{P}_c - P_0 \approx -0,15 \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}_{1, \max}^2 \right),$$

согласно которой разность статических давлений оказывается на два порядка выше, чем по вычислениям Толмина.

Непосредственное экспериментальное определение разности статических давлений было бы весьма желательно. Но из-за высокой относительной интенсивности турбулентности в свободных струях надежное измерение статического давления в струе крайне затруднительно. Однако подобные измерения все же удалось произвести. Измерения в круглой свободной струе ($Re_d = U_p d/\nu = 400\,000$) вплоть до максимального расстояния $x/d = 10$ были осуществлены Бара [37].

На этом расстоянии минимальное статическое давление на оси струи оказалось равным

$$\bar{P}_c - P_0 \approx -0,075 \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}_{1, \max}^2 \right).$$

По направлению к краю струи абсолютная разность давлений монотонно убывает до нуля. К сожалению, Бара не указывает, каким методом он пользовался для измерения статического давления в зоне интенсивной турбулентности.

Аналогичные измерения в плоской свободной струе ($Re = U_p a / \nu = 18\,000$, a — ширина щели) были проведены Миллером и Камингсом [43]. Статическое давление в струе измерялось с помощью диска с диаметром 1,25 см, имевшего отверстие 0,05 см и расположенного параллельно основному направлению течения. В различных поперечных сечениях струи были получены профили статического давления, подобные профилям, снятым Бара. Относительная отрицательная разность давлений возрастала в направлении вниз по потоку, так и не достигая постоянной величины даже в наиболее удаленном поперечном сечении $x/a = 40$. При $x/a = 10$ Миллер и Камингс получили для отношения $(\bar{P}_c - P_0) / \frac{1}{2} \rho \bar{U}_{1, \max}^2$ значение около $-0,052$, а при $x/a = 40$ — значение $-0,116$.

Результаты опытов Бара, а также Миллера и Камингса показывают, что разность статических давлений в струе имеет (по крайней мере) такой же порядок, как и величина, вычисленная по относительной интенсивности турбулентности на основании уравнения (6.16а). Разность статических давлений в сечении струи полностью уравнивается поперечным изменением турбулентных напряжений.

Во всех предшествовавших рассуждениях мы умышленно пренебрегали влиянием изменения плотности. Вообще говоря, это влияние и в самом деле оказывается незначительным, даже при умеренных разностях плотности. Опыты со свободными струями, вытекающими в неподвижный воздух и имеющими существенную начальную разницу плотностей, показали, что общая форма струи подвергается лишь небольшим изменениям. Распределение скорости остается практически таким же, как и в струях с постоянной плотностью. Некоторыми исследователями было показано, что при наличии разности плотностей жидкости в струе и в окружающей среде толщина струи, например величина $(\xi_2)_{1/2}$, изменяется. Согласно результатам этих опытов, с увеличением плотности жидкости в струе по сравнению с плотностью окружающей жидкости толщина струи становится меньше.

В случае струи с постоянной плотностью величина «половинного радиуса» составляет примерно $(\xi_2)_{1/2} \approx 0,08$. Согласно данным Корсина и Юбероя [22], когда начальная температура струи превышает

температуру окружающей среды на 300°C (начальное отношение плотностей около 0,5), эта величина возрастает до 0,094. Оказалось, кроме того, что при этом длина «потенциального» ядра значительно уменьшается, а скорость на оси струи убывает с увеличением расстояния от сопла более интенсивно, нежели в случае струи с постоянной плотностью. Шаблевский [38] на основании своих расчетов, проделанных для отношений плотностей $\rho_p/\rho_0 = 0,5, 1$ и $2,5$, показал, что с увеличением ρ_p/ρ_0 длина потенциального ядра возрастает, а толщина струи уменьшается.

Киджи и Уэллер [39], которые проводили опыты с вертикальными струями гелия и углекислого газа, вытекавшими в неподвижный воздух, получили для струи гелия ($\rho_p/\rho_0 = 0,14$) значение «половинного радиуса» $(\xi_2)_{1/2} \approx 0,1$, а для струи углекислого газа ($\rho_p/\rho_0 = 1,5$) значение, примерно равное 0,076. Следует заметить, что при этом не вносилось никаких поправок на влияние архимедовых сил.

В то же время Сунавала, Халс и Тринг [40] обнаружили, что «половинный радиус» составляет $(\xi_2)_{1/2} \approx 0,11$ и при этом не зависит от температуры и давления в сопле. Эти авторы экспериментировали с воздушными струями, обладавшими различной начальной температурой (избыток которой над температурой окружающей среды составлял до 320°C) и вытекавшими из сопел с диаметром от 0,47 до 0,95 см. Ими же было показано, что затухание скорости вдоль оси струи с увеличением расстояния от сопла при более высокой температуре струи является более интенсивным. При этом кривые затухания скорости удалось совместить с соответствующей кривой для изотермической струи постоянной плотности путем замены диаметра сопла некоторым эквивалентным диаметром

$$d_e = d \left(\frac{\theta_0}{\theta_p} \right)^{1/2} = d \left(\frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Понятие эквивалентного диаметра было введено Трингом и Ньюбаем [41]. Оно основано на предположении о том, что все процессы в струе определяются ее полным импульсом. Уравнение для полного потока импульса (при $U_s = 0$) имеет вид

$$2\pi \int_0^\infty \rho U_1^2 r dr = \frac{\pi}{4} d^2 \rho_p U_p^2 = \frac{\pi}{4} d_e^2 \rho_0 U_p^2,$$

откуда следует, что

$$d_e = d \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_0}}.$$

На достаточно больших расстояниях от сопла, например при $x_1/d > 10$, плотность в струе становится близкой к плотности окру-

жающей жидкости. Если для столь больших расстояний принять, что $\rho \approx \rho_0$, то получится

$$2\pi \int_0^{\infty} U_1^2 r dr = \frac{\pi}{4} d_e^2 U_p^2.$$

В рассматриваемом случае можно воспользоваться тем же методом, что и для струи с постоянной плотностью. Тогда предположение о подобии профилей скорости приводит к прежнему результату [см. уравнение (6.55)]:

$$\frac{\bar{U}_1}{U_p} = A_1 \frac{d_e}{x+a} f(\xi_2).$$

Если A_1 и a не зависят от отношения плотностей ρ_p/ρ_0 , то эта формула показывает, что при $d_e < d$, т. е. при $\rho_p/\rho_0 < 1$, скорость с увеличением расстояния $(x+a)$ падает до меньшей величины. Однако функция распределения $f(\xi_2)$ может при этом оставаться неизменной.

Разница плотностей может быть также обусловлена разностью давлений, что наблюдается, например, в случае струй сжимаемого газа, обладающих большой скоростью. Сведения о турбулентности в подобных струях весьма ограничены. Бай [12] произвел расчет распространения струи в высокоскоростном потоке при $U_p/U_s = 1$, применив метод малых возмущений в предположении о постоянстве коэффициента вихревой вязкости в поперечном сечении струи. Дифференциальное уравнение для определения скорости оказывается в этом случае идентичным соответствующему уравнению для ламинарной струи, так что при этом получают и идентичные решения.

Так как на некотором расстоянии от сопла разность плотностей струи и окружающей среды становится малой, то для описания затухания скорости струи с расстоянием от сопла в данном случае также можно воспользоваться понятием эквивалентного диаметра.

§ 6.10. Измерение характеристик турбулентности в круглой свободной струе

Для полностью развитой турбулентной струи интересующие нас экспериментальные результаты содержатся в работах Корсина [21], Корсина и Юбероя [22, 23] и Корсина и Кистлера [29]. В этих опытах применялись струи воздуха с температурой, равной температуре окружающей атмосферы или превышающей ее в начальном сечении на 300°C ; несколько раньше подобные измерения были проведены Липманом и Лауфером [30] в зоне смешения между потенциальным ядром и окружающим воздухом в изотермической воздушной струе. Диапазон этих измерений впоследствии был расширен Лауренсом [31].

Во всех перечисленных опытах для измерения характеристик турбулентности применялся термоанемометр. Чин и Риб [32] для определения энергетического спектра и скорости диссипации энергии воспользовались совершенно иным методом, состоявшим в фотографировании траекторий движения частиц корпии в турбулентной струе воздуха, имевшей небольшую скорость. Однако опытные данные этих авторов имеют настолько большой разброс, что полученные результаты следует признать не очень убедительными.

В настоящем параграфе мы будем иметь дело главным образом с результатами, полученными Корсином и его сотрудниками.

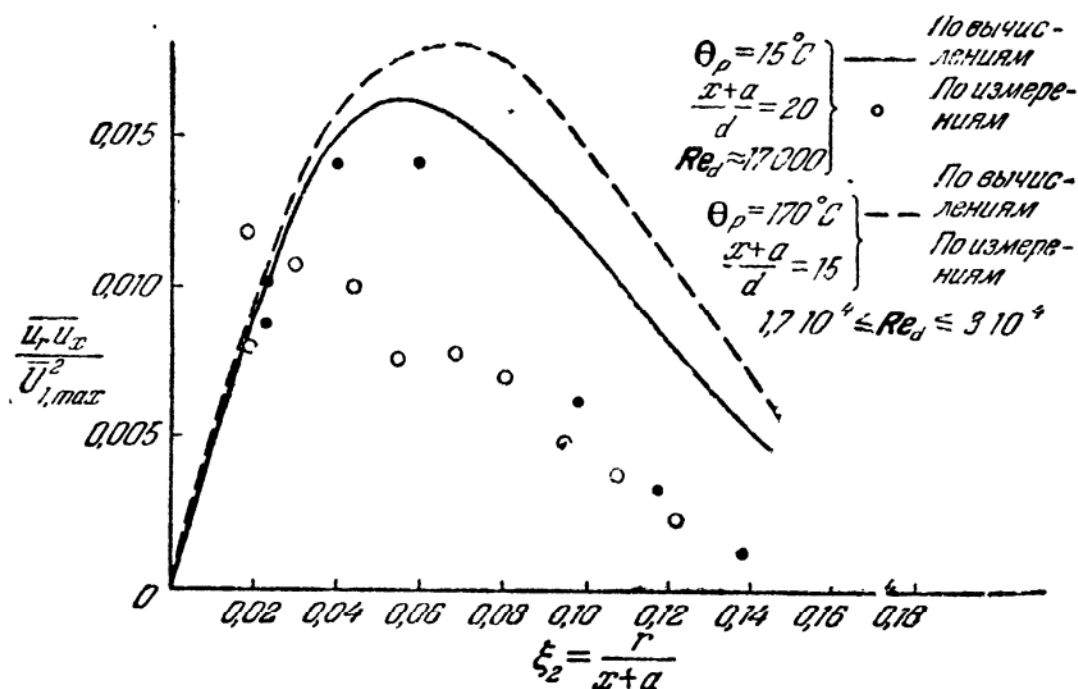


Рис. 6.21. Распределение турбулентного напряжения сдвига в круглой свободной струе. [Корсин С., NASA Wartime Repts. ACR 3L23, рис. 40, 1943.]

На рис. 6.21 показано распределение напряжения сдвига, представленное одноточечной двойной корреляцией $\overline{u_r u_x}$ в холодной и нагретой струях воздуха, вытекающих из сопла с диаметром 2,5 см. Кривые относятся к значениям, вычисленным согласно уравнению (6.61) по измеренным распределениям осредненной скорости.

Нагретая струя распространяется шире и соответственно характеризуется более высокими значениями турбулентного напряжения сдвига, чем холодная струя. Согласие между измеренными и вычисленными значениями напряжений сдвига наблюдается лишь вблизи оси струи. Ближе к границе струи измеренные значения намного ниже расчетных. Это расхождение частично может быть обусловлено перемежающимся характером турбулентности вблизи границы струи, но весьма вероятно, что оно в основном является следствием система-

тической ошибки в измерениях, присущей методу термоанемометра. В случае нагретой струи могла вноситься дополнительная ошибка, обусловленная трудностью точного определения сопротивления ненагретой нити при местной повышенной температуре окружающей среды [22].

Корсином и Юбероем была также измерена одноточечная двойная корреляция $\overline{u_r \theta}$, которая для случая нагретой струи вместе с

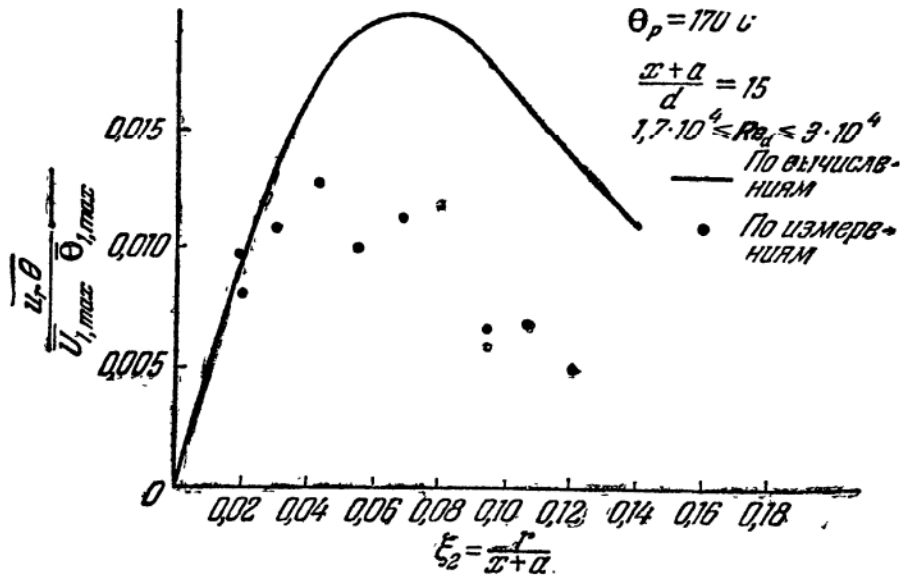


Рис. 6.22. Распределение поперечного турбулентного переноса тепла в круглой свободной струе [22].

кривой, найденной расчетом по распределению осредненной температуры, изображена на рис. 6.22. Из уравнений переноса для $\overline{\Gamma}$, выведенных в § 6.8, получается соотношение

$$\frac{\overline{u_r \theta}}{\overline{U_{1, \max}} \overline{\theta_{1, \max}}} = \frac{1}{\xi_2} \frac{\overline{\theta_1}}{\overline{\theta_{1, \max}}} \int_0^{\xi_2} \frac{\overline{U_1}}{\overline{U_{1, \max}}} \xi_2 d\xi_2, \quad (6.95)$$

которое и было использовано для вычисления распределения $\overline{u_r \theta} / \overline{U_{1, \max}} \overline{\theta_{1, \max}}$. Хотя распределение измеренных значений по своей форме и сходно с расчетным распределением, измеренные значения оказываются все же значительно ниже расчетных.

Из приведенной выше формулы для $\overline{u_r \theta} / \overline{U_{1, \max}} \overline{\theta_{1, \max}}$ и аналогичного соотношения (6.61) следует, что

$$\frac{\overline{u_r \theta} / \overline{U_{1, \max}} \overline{\theta_{1, \max}}}{\overline{u_r u_x} / \overline{U_{1, \max}}^2} = \frac{\overline{\theta_1}}{\overline{\theta_{1, \max}}} \frac{\overline{U_{1, \max}}}{\overline{U_1}}. \quad (6.96)$$

Так как распространение тепла превышает распространение импульса, то это отношение больше единицы. Кроме того, с увели-

чением расстояния от оси струи это отношение возрастает. Этот вывод иллюстрируется на рис. 6.23, где помимо экспериментальных результатов представлены также значения, вычисленные по опытным данным, изображенным на рис. 6.21 и 6.22. Как и прежде, экспериментальные значения систематически отклоняются от значений, вычисленных по распределениям осредненной скорости и осредненной температуры, хотя общий характер рассматриваемых зависимостей и одинаков. По-видимому, ошибки измерений, которыми обусловлено

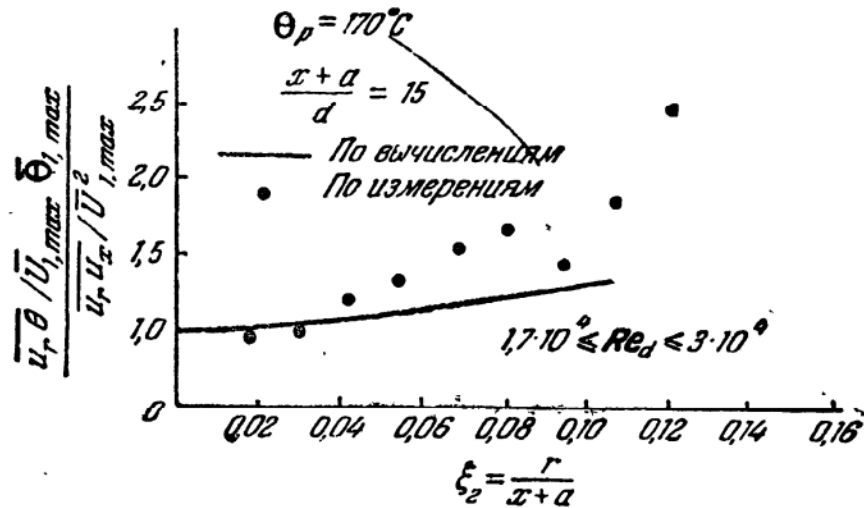


Рис. 6.23. Отношение поперечного турбулентного переноса тепла и импульса в сечении круглой свободной струи.

различие между измеренными и вычисленными значениями, в случае $\overline{u_r \theta}$ и $\overline{u_r u_x}$ неодинаковы, причем на величине $\overline{u_r u_x}$ они сказываются сильнее, чем на $\overline{u_r \theta}$.

Результаты термоанемометрических измерений компонент интенсивности турбулентных пульсаций скорости u'_x и u'_r , проведенных Корсином [21], показаны на рис. 6.24 (третья компонента в опытах Корсина не измерялась).

Если сравнивать характер изменения и сами величины относительной интенсивности турбулентности в рассматриваемом случае и для следа за цилиндром (см. рис. 6.5, где показано распределение квадрата относительной интенсивности турбулентности), то между ними обнаруживается большое сходство. Будучи отнесенными к максимальной разности $\overline{U}_{1, \max}$ на оси потока, компоненты относительной интенсивности турбулентных пульсаций в обоих случаях имеют одинаковую величину.

Однако весьма вероятно, что компоненты относительной интенсивности турбулентности, измеренные в свободной струе, слишком занижены. Это может быть обусловлено той же причиной, по которой получают и довольно заниженные значения одноточечной двой-

ной корреляции $\overline{u_r u_x}$. Это опасение подтверждается результатами аналогичных измерений, проведенных Ван дер Хегге Цийненом [33] в плоской струе воздуха. Им тоже было обнаружено, что компоненты интенсивности турбулентности и турбулентное напряжение сдвига, измеренные с помощью термоанемометра, получают заниженными.

Поскольку струя в опытах Корсина и Юбероя вытекала в неподвижный воздух, то величина u'_x/\bar{U}_1 является определяющим критерием применимости термоанемометра в качестве надежного измерительного

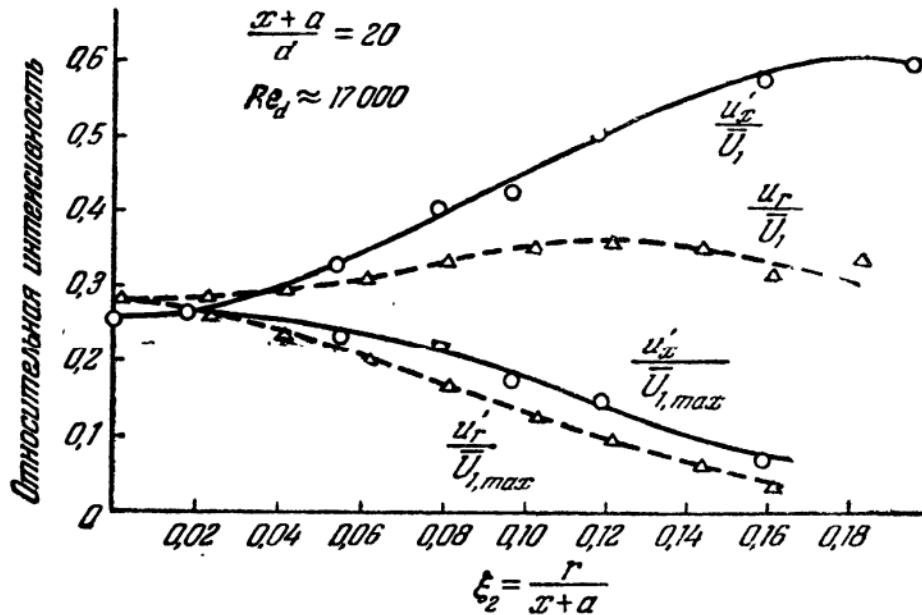


Рис. 6.24. Распределение компонент относительной интенсивности турбулентности в газотермической круглой свободной струе. [Корсин, NASA Wartime Repts. ACR 3L23, рис. 24, 1943.]

прибора, когда используется метод, основанный на предположении о малости пульсаций скорости. При исследовании течения в следе подобным определяющим критерием является величина $u'_x/(U_0 - \bar{U}_1)$. Но так как для следа, исследованного Таунсендом, выполнялось неравенство $U_0 \gg \bar{U}_1$, то величина $u'_x/(U_0 - \bar{U}_1)$ должна была быть очень малой. Поэтому полученные в опытах Таунсенда данные об относительной интенсивности турбулентности должны быть более надежны, чем соответствующие данные Корсина для струи.

Подобно течению в следе, свободные струи характеризуются несколько большими значениями u'_r по сравнению с u'_x вблизи оси струи, но на некотором расстоянии от оси наблюдается обратная картина.

Так как в опытах Корсина величина u'_ϕ не измерялась, то по его данным нельзя вычислить распределение кинетической энергии турбулентности $\overline{q^2}$ в поперечном сечении струи. Но было бы очень

интересно посмотреть, наблюдается ли и при струйном течении приблизительное постоянство этой величины в центральной части потока.

Помимо относительной интенсивности турбулентных пульсаций скорости, Корсин и Юберой измеряли также относительную интенсивность турбулентных пульсаций температуры. Соответствующие результаты для одного поперечного сечения нагретой струи, расположенного на расстоянии $(x+a)/d=20$, представлены на рис. 6.25. Вблизи оси струи относительная и абсолютная интенсивности пульсаций температуры оказались ниже интенсивности осевой компоненты

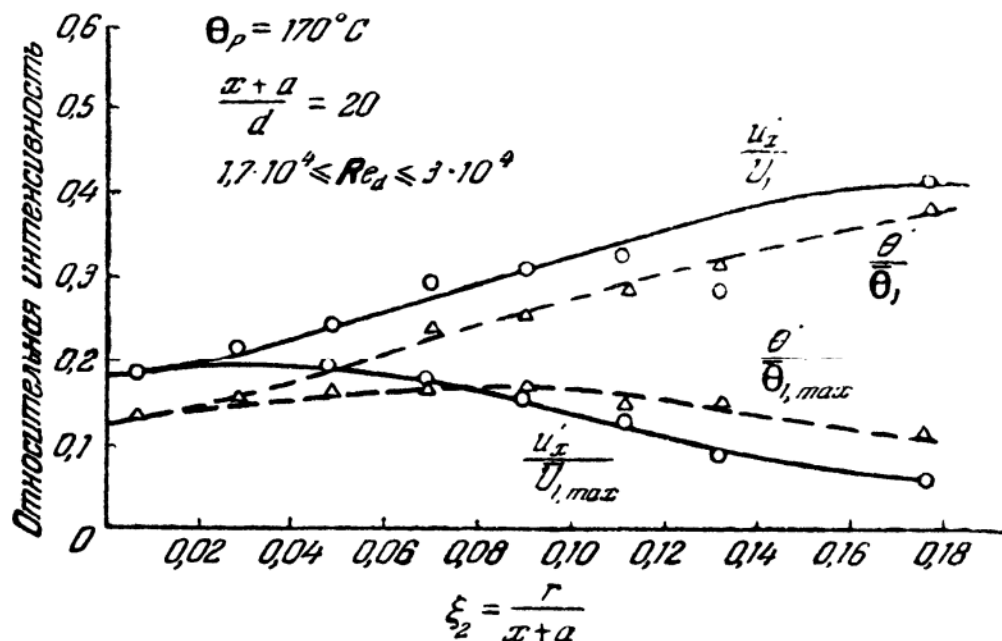


Рис. 6.25. Распределение относительной интенсивности турбулентных пульсаций скорости и температуры в нагретой круглой свободной струе [22].

турбулентных пульсаций скорости. Вблизи края струи для абсолютной интенсивности наблюдается обратная картина.

Корсином и Юбероем были измерены также и одномерные спектры $E_1(k_1)$ и $E_{\theta_1}(k_1)$ турбулентных пульсаций скорости и температуры. Эти измерения производились в двух точках одного поперечного сечения струи, соответствующего $(x+a)/d=20$: на оси струи и в точке максимального напряжения сдвига.

Измерения спектра пульсаций скорости u_1 проводились на холодной струе; при измерении спектра пульсаций температуры θ струя была нагрета и ее температура на выходе из сопла составляла $\theta_p = 170^\circ\text{C}$. На рис. 6.26 изображены кривые, проведенные в среднем по экспериментальным точкам. Анализ этих кривых показывает, что (1) энергетические спектры турбулентных пульсаций скорости u_1 в обеих упомянутых точках практически одинаковы; (2) в случае спектра пульсаций u_1 в диапазоне больших волновых чисел наблюдается следующее отличие: спектральное распределение в точке, соот-

ветствующей максимальному напряжению сдвига, убывает быстрее, чем распределение в точке на оси струи; (3) между спектрами пульсаций u_1 и θ не имеется существенного различия, особенно в точке максимального напряжения сдвига; (4) в спектрах пульсаций u_1 не наблюдается диапазона, где выполнялся бы закон « $-5/3$ ». Однако подобный диапазон Колмогорова должен был бы наблюдаться в рассматриваемом случае, так как число Рейнольдса турбулентности было достаточно высоким, примерно $Re_\lambda \approx 500$. В то же время Корсин

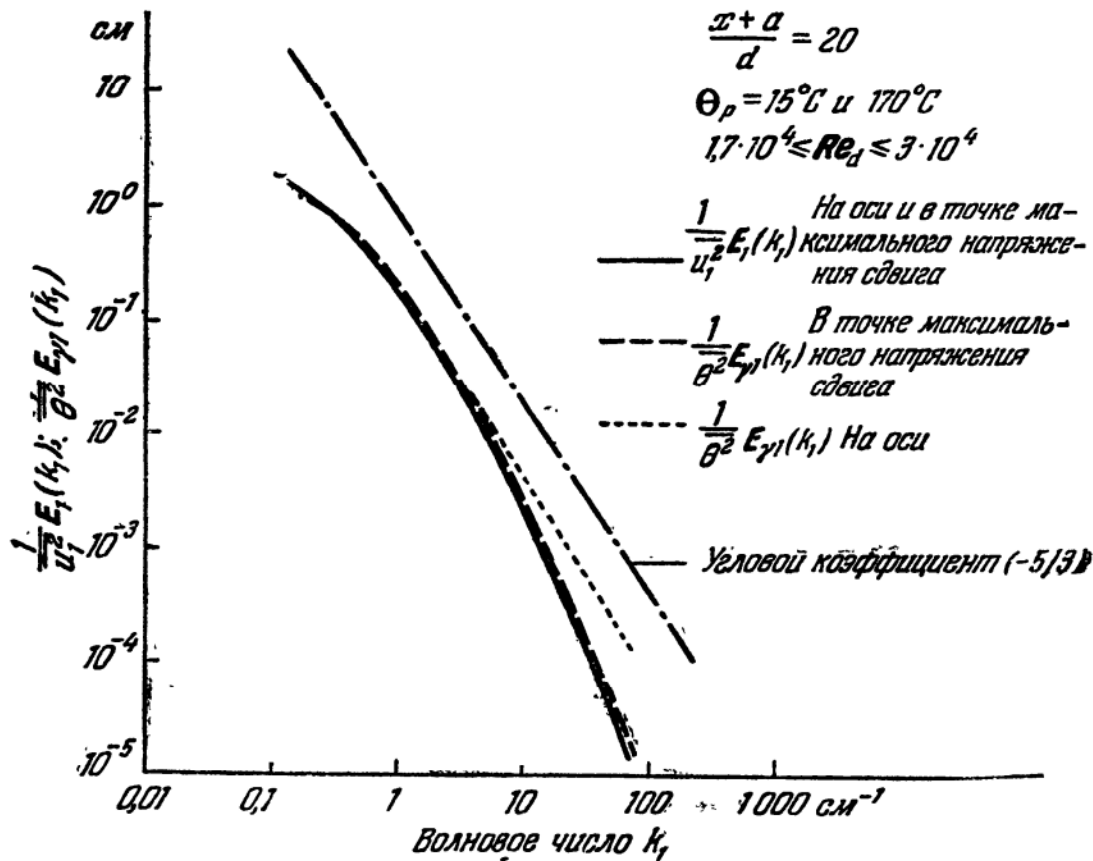


Рис. 6.26. Одномерные спектры пульсаций u_1 и θ на оси и в точке максимального напряжения сдвига в круглой свободной струе [23].

и Юберой обнаружили, что оба энергетических спектра пульсаций скорости могут быть удовлетворительно аппроксимированы интерполяционной формулой Кармана (3.134):

$$E_1(k_1) = \frac{\text{const}}{[1 + (k_1/k_e)^2]^{5/6}},$$

правда, лишь в ограниченном диапазоне $0 < k_1 < 1,25$. Скорость на оси струи при $(x+a)/d = 20$ составляла в этих опытах около 12 м/сек. При такой величине скорости из соотношения $k_1 = 2\pi n_1/\bar{U}_1 = 1,25$ получается частота $n_1 \approx 250 \text{ сек}^{-1}$. Выше этой частоты функция $E_1(k_1)$ убывает более быстро, чем по закону « $-5/3$ ».

Экспериментальные данные о распределении напряжения сдвига, переноса тепла в поперечном направлении, интенсивности пульсаций скорости и температуры и их спектрах приводятся здесь, главным образом, для того, чтобы дать общее представление о них. К абсолютным значениям, измеренным в опыте, следует относиться с оговорками. Это объясняется не только тем, что применявшиеся здесь методы измерений не позволяют получить очень надежных значений (этот вопрос рассматривался выше), но также и тем, что условия течения в струе в тех сечениях, где производились измерения, еще не соответствовали полностью развитому равновесному состоянию.

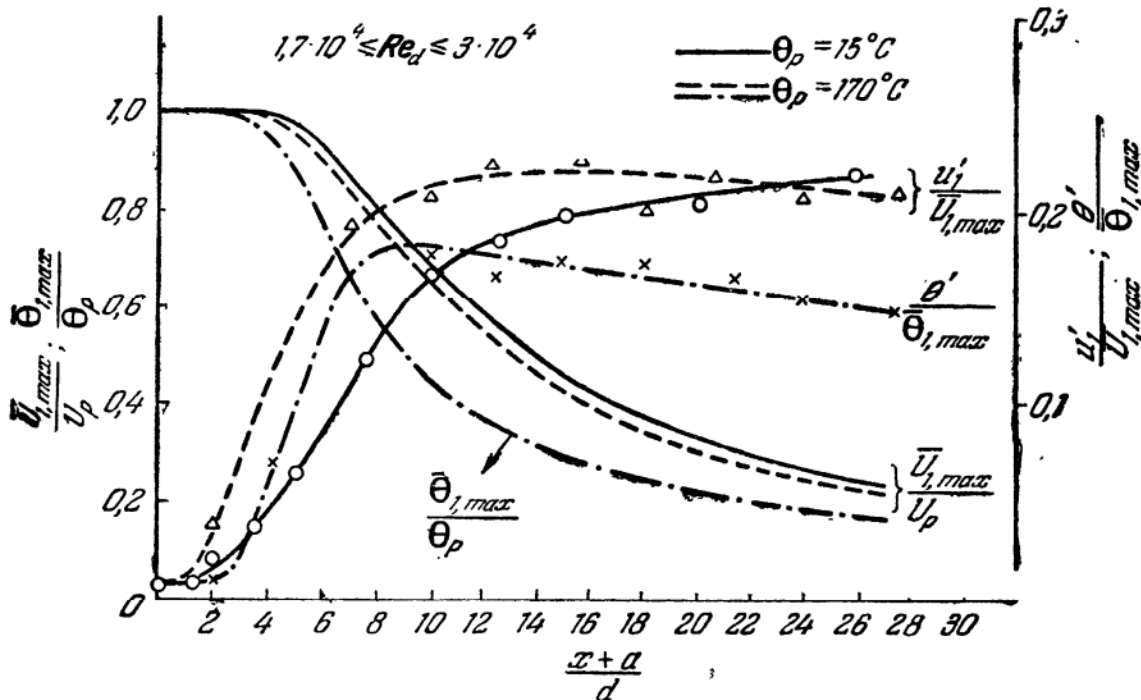


Рис. 6.27. Распределение осредненной скорости, осредненной температуры и относительной интенсивности пульсаций скорости и температуры вдоль оси круглой свободной струи [22].

Измерения, проведенные в сечениях, отличных от тех, к которым относятся результаты, изображенные на рассмотренных рисунках, свидетельствуют о том, что характеристики турбулентности все же изменяются с расстоянием от сопла. На рис. 6.27 показано изменение осредненной скорости и относительной интенсивности $u_1' / \bar{U}_{1,max}$ вдоль оси струи, а также соответствующие характеристики распределения температуры. Эти измерения проводились как в холодной, так и в горячей струе воздуха. Из рассмотрения этого рисунка можно заключить, что в сечении $(x+a)/d = 20$ автомодельность распределений интенсивностей турбулентности вряд ли достигается, хотя, как мы убедились выше, радиальные распределения осредненной

скорости и осредненной температуры оказываются подобными уже при $(x+a)/d \geq 10$. Отклонения компонент интенсивности турбулентности от автомодельности по направлению к границе струи даже возрастают. Результаты других измерений, проведенных Корсином и Юбероем и относящихся к распределениям компонент интенсивности турбулентности в различных поперечных сечениях струи, показывают, что полная автомодельность не достигается даже при $(x+a)/d = 40$, т. е. на максимальном расстоянии от сопла, где проводились измерения.

В заключение этого параграфа рассмотрим распределение коэффициента перемежаемости Ω в поперечных сечениях круглой свободной струи. Соответствующие опытные данные, полученные Корсином

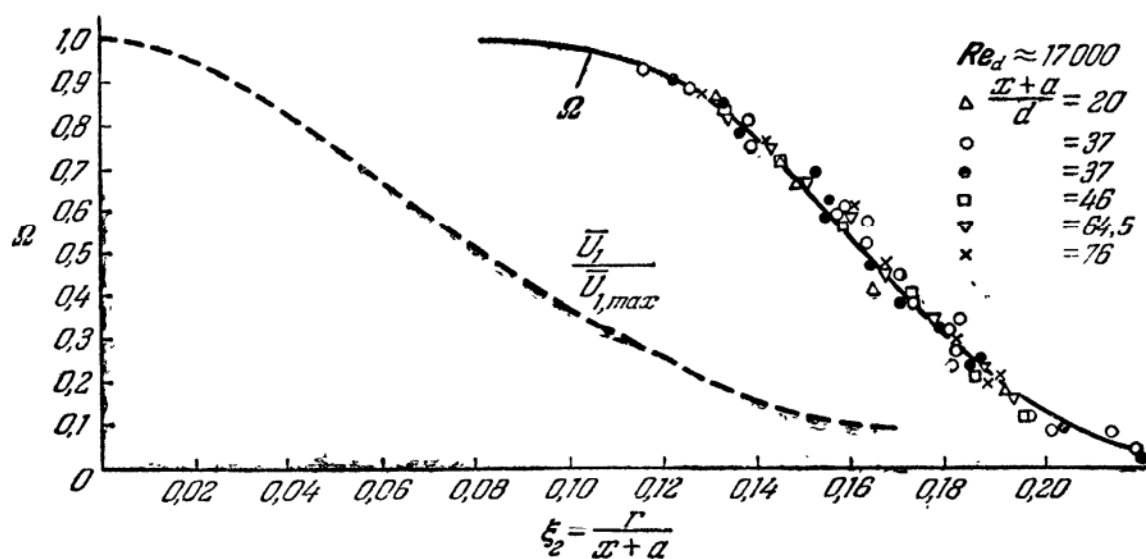


Рис. 6.28. Распределение коэффициента перемежаемости Ω в круглой свободной струе [29].

и Кистлером [29], приводятся на рис. 6.28. Эти данные показывают, что распределения Ω в различных поперечных сечениях потока в диапазоне изменения величины $(x+a)/d$ от 20 до 76 являются вполне подобными. Если этот рисунок сравнить с соответствующим рис. 6.12 для следа за круглым цилиндром, то сразу бросится в глаза, что поперечный размер зоны, где $\Omega \approx 1$, в случае круглой свободной струи значительно больше, нежели в случае плоского следа.

Так как измерения характеристик турбулентности, например компонент интенсивности турбулентности и коэффициента вихревой вязкости, относятся практически лишь к той зоне, где коэффициент перемежаемости близок к единице, то поправка на коэффициент перемежаемости, будучи внесена в распределения, изображенные на рис. 6.18, 6.24 и 6.25, едва ли изменит форму этих кривых, хотя, возможно, сделает эти кривые более равномерными.

§ 6.11. Структура свободного турбулентного потока со сдвигом и процессы переноса

Анализируя форму свободных турбулентных потоков со сдвигом (струя и след за телом), явления, сопровождающие эти течения, и распределения различных характеристик турбулентности, можно получить представление о структуре турбулентности и связанных с ней процессах. Вкратце соответствующие эмпирические факты сводятся к следующему.

1. Распространение турбулентной зоны поперек направления основного течения протекает сравнительно медленно.

2. Турбулентная зона отделена от нетурбулентной неупорядоченно возмущенной граничной поверхностью.

3. Турбулентное течение носит перемежающийся характер, особенно вблизи «средней» границы турбулентной зоны.

4. Многие параметры потока, например компоненты интенсивности турбулентности и диссипации, на большей части поперечного сечения области турбулентного течения характеризуются высокой равномерностью, стремясь к нулю лишь в перемежающейся пограничной зоне.

5. Отмеченная равномерность распространяется на еще большую область, если в функцию распределения рассматриваемой величины внести поправку на коэффициент перемежаемости.

6. В центральной части турбулентного потока могут наблюдаться небольшие зоны, поперечный перенос энергии турбулентности в которых оказывается направленным вдоль, а не против градиента ее распределения.

Наиболее полные и, вообще говоря, наиболее надежные экспериментальные данные получены, благодаря систематическим исследованиям Таунсенда, для течения в следе за круглым цилиндром. Хотя многие другие экспериментаторы тоже внесли свой вклад в развитие представлений о явлениях, сопровождающих свободное турбулентное течение с поперечным сдвигом, несомненно, что наиболее важную роль в этом отношении сыграли исследования Таунсенда. Основываясь на собственных экспериментальных данных, а также на работах других авторов по свободным струям, Таунсенд пришел к определенной концепции структуры свободного турбулентного потока со сдвигом. Сущность этой концепции изложена в его книге «Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом» [9] при описании, как он называет, модельной структуры свободного турбулентного потока со сдвигом, хотя это описание, несомненно, применимо в значительной степени и к реальным течениям.

Это описание, если дословно цитировать Таунсенда, сводится к следующему.

1) Полностью турбулизированная жидкость (область, характеризующаяся существенными пульсациями завихренности) ограничена искривленными поверхностями, которые в некоторых точках могут достигать центральной плоскости потока. Эти ограничивающие поверхности перемещаются благодаря конвективному воздействию системы крупных вихрей, размеры которых сравнимы с шириной той части потока, в которой осредненный сдвиг повсюду имеет один и тот же знак, а также благодаря описанному выше процессу захвата невозмущенной жидкости.

2) Невозмущенная жидкость снаружи от ограничивающих поверхностей не турбулизирована, и ее движение является безвихревым и складывается из поступательного движения (если оно существует) с осредненной скоростью и потенциального течения, обусловленного движением на границе.

3) За исключением непосредственной окрестности границ, где происходит процесс захвата неподвижной жидкости, интенсивность турбулентности распределена почти равномерно. Это оказывается возможным, поскольку масштаб турбулентности мал, а его временные масштабы для порождения и диссипации энергии турбулентности сравнимы со временем существенного развития течения.

4) Крупные вихри, которые искривляют ограничивающую поверхность, представляют собой вытянутые в направлении течения простые вихри с центральной завихренностью, направленной вдоль главной оси положительной осредненной скорости деформации; центры их расположены вблизи плоскости максимальной интенсивности сдвига. Время жизни этих вихрей сравнимо с временем существенного развития течения, однако они не представляют собой перманентных структур, так как новые вихри возникают по мере исчезновения старых.

Таким образом, течение в следе, например, представляет собой ядро полностью развитой непрерывной турбулентности, из которого образуются выпучины, перемещаемые в наружном направлении движением крупных вихрей, причем их масштаб сравним с шириной следа. Крупные вихри и выпучины состоят из мелкомасштабных вихрей, по крайней мере на порядок меньших, чем крупные вихри. Эти мелкомасштабные вихри, которые зарождаются, главным образом, в зоне ядра, вовлекаются в крупномасштабные движения выпучин.

Исходя из этих представлений, можно сразу же объяснить, почему возмущения энергии турбулентности и диссипации в зоне ядра и внутри выпучин пограничной зоны примерно постоянны; эти представления приводят также к равномерной внутренней мелкомасштабной структуре турбулентности по всей турбулентной зоне. И в самом деле, пространственные интегральные масштабы Λ_g [определяемые коэффициентами корреляции $R_{2,2}(x_1, 0, 0)$ и $R_{3,3}(x_1, 0, 0)$] приблизительно

постоянны в поперечном сечении следа, а их величины составляют от $1/4$ до $1/2$ ширины следа.

Рассмотрим теперь более подробно перенос различных субстанций, опираясь при этом на изложенные выше представления о структуре турбулентности. В этом отношении следует иметь в виду существование, наряду с медленными крупномасштабными движениями, высокоинтенсивных мелкомасштабных турбулентных движений, иными словами, двойственную структуру турбулентности.

Субстанции, которые мы рассмотрим, включают в себя осевой импульс, тепло и энергию турбулентности. Турбулентный перенос этих субстанций обуславливается только что упомянутыми двумя типами турбулентного движения. Если мелкомасштабная турбулентность обладает настолько малым масштабом, что осредненная величина рассматриваемой субстанции на расстояниях, равных этому масштабу, практически равномерна, то логично предположить, что перенос, обусловленный мелкомасштабной турбулентностью, можно описать как диффузию градиентного типа. В то же время перенос посредством крупномасштабной турбулентности может рассматриваться как чисто конвективное явление.

Пусть \mathcal{P} — рассматриваемая транспортабельная субстанция; тогда можно записать

$$\overline{u_j \mathcal{P}} = \overline{u_j^* \mathcal{P}} + \overline{\mathcal{V}_j \mathcal{P}} = -\Omega(\epsilon_{\mathcal{P}})_{ji} \frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial x_j} + \overline{\mathcal{V}_j \mathcal{P}}. \quad (6.97)$$

Здесь u_j^* и \mathcal{V}_j — соответственно мелко- и крупномасштабная составляющие турбулентной пульсации скорости u_j .

Результаты действия диффузии градиентного типа и конвективного переноса нельзя считать независимыми от природы транспортабельной субстанции. В самом деле, они различны для импульса, тепла и энергии турбулентности; это следует хотя бы из различия распределений их осредненных величин. Какова степень этого различия, сказать еще очень затруднительно. Но о чем говорит форма кривых этих распределений?

Если, с одной стороны, перенос был бы полностью связан с конвективным движением со скоростью \mathcal{V}_j больших масс, то величина этой субстанции (при условии, что эффекты, вызывающие локальные изменения переносимой субстанции, невелики и, стало быть, эти изменения малы по сравнению с абсолютной величиной этой субстанции) в области ядра изменялась бы лишь немного, а в пограничной зоне быстро уменьшалась бы до нуля. Таким образом, в том случае, когда переносимой субстанцией является энергия турбулентности, изменения этой энергии, обусловленные порождением и диссипацией, должны быть малы по сравнению с уровнем энергии.

Если, с другой стороны, перенос происходил бы лишь вследствие диффузии градиентного типа, обусловленной мелкомасштаб-

ной турбулентностью, то по направлению от центра турбулентной зоны к ее наружной границе наблюдалось бы постепенное уменьшение данной субстанции.

Рассмотрим в свете этих представлений кривые распределения осредненной осевой скорости (характеризующей распределение осредненного осевого импульса), тепла и кинетической энергии турбулентности, которые изображены соответственно на рис. 6.3, 6.4 и 6.5.

Из анализа этих рисунков вытекает, что осредненный осевой импульс распределяется как при диффузии градиентного типа, а кинетическая энергия турбулентности — как при конвективном переносе; распределение тепла следует некоторым промежуточным путем. Конечно, было бы большим преувеличением делать вывод о том, что распределение импульса определяется лишь диффузией градиентного типа, а распределение энергии турбулентности — лишь конвекцией, хотя тем не менее при этом получается вполне удовлетворительное описание распределения этих субстанций.

Однако имеются аргументы против концепции доминирующего переноса импульса посредством диффузии градиентного типа. Один из таких аргументов основан на экспериментальном факте, состоящем в том, что в зоне максимального сдвига отношение $\overline{u_1 u_2} / \overline{q^2}$ распределено почти равномерно. Этот факт, по-видимому, указывает на независимость переноса импульса от градиента осредненного импульса (градиента осредненной скорости). Кроме того, экспериментально обнаруженное влияние градиента давления на перенос импульса свидетельствует о том, что возможность диффузии чисто градиентного типа не очень велика.

Но в то же время экспериментальные наблюдения показывают, что распределение осредненного импульса описывается с поразительной точностью, если принять предположение о постоянстве коэффициента вихревой вязкости. Если коэффициент вихревой вязкости определяется локальными условиями турбулентного движения [что предполагается, например, гипотезой Кармана (5.14) или эквивалентным ей соотношением (5.16)], то это должно быть совместимо с равномерностью мелкомасштабной структуры турбулентности в турбулентных зонах. Однако если постоянный коэффициент вихревой вязкости определяется крупномасштабными движениями [см., например, предположение Прандтля (5.15)], то описание переноса импульса с помощью этого коэффициента вихревой вязкости и локального градиента осредненного импульса привело бы к противоречию.

Таким образом, учитывая все изложенное, в настоящее время с уверенностью можно принять лишь вывод о том, что процессы переноса в свободных турбулентных потоках тесно связаны с двойственной структурой турбулентности и могут быть описаны с помощью соотношений типа (6.97), в которых составляющие,

обусловленные обоими процессами [например, величина $(\epsilon_{\mathcal{P}})_{ij}$], различны для разных транспортабельных субстанций.

Хотя концепция переноса с помощью диффузии градиентного типа в совокупности с предположением о постоянстве коэффициента вихревой вязкости общепринята и дает вполне приемлемое описание распределения осредненного импульса, тем не менее она имеет лишь очень отдаленное отношение к реальным физическим процессам (Таунсенд [9]). Можно также отметить, что та же концепция, примененная к распределению тепла и энергии турбулентности, не приводит к эквивалентным результатам (см. § 6.9). Весьма вероятно, что роль конвективного переноса этих субстанций, особенно в случае энергии турбулентности, отнюдь не является малой.

В предыдущих параграфах мы пытались описать перенос тепла под воздействием одной лишь диффузии с помощью коэффициента вихревой диффузии ϵ_{γ} . В таком случае этот коэффициент включает влияние конвекции при крупномасштабных движениях. При этом оказалось, что $\epsilon_{\gamma}/\epsilon_{\gamma n} > 1$ и что это отношение в случае плоской зоны смешения больше, нежели в случае осесимметричной. Если конвективный перенос не вносит существенного вклада в величину ϵ_{γ} , то это различие можно объяснить следующим образом.

Таунсенд произвел оценку скорости крупномасштабного движения по распределению кинетической энергии турбулентности в следе за цилиндром, приняв, что

$$\overline{q^2 \mathcal{V}} = \overline{q^2 \mathcal{V}^*}.$$

Им было обнаружено, что эта кажущаяся скорость \mathcal{V} направлена наружу и по мере приближения к границе следа быстро возрастает до своего максимального значения при $\xi_2 = 0,4$, а затем очень быстро уменьшается до нуля в пограничной зоне. Указанное максимальное значение составляет примерно $\mathcal{V}^*/\bar{U}_{1, \max} \approx 0,15$. Следовательно, скорость этого направленного наружу крупномасштабного движения является величиной такого же порядка, как и относительная интенсивность турбулентности (хотя и несколько меньшей ее), что представляется вполне логичным.

Можно ожидать, что характер этого направленного наружу течения будет в осесимметричной зоне смешения (например, в круглой свободной струе) иным по сравнению со случаем плоской зоны смешения; в осесимметричной зоне смешения скорость \mathcal{V} будет изменяться в наружном направлении с меньшей быстротой благодаря тому, что в зоне с осевой симметрией направленного наружу течения носит расходящийся характер. Таким образом, влияние конвективного течения со скоростью \mathcal{V} на полный перенос в наружном направлении в круглой струе или круглом следе будет меньше, чем в плоской струе или плоском следе.

Это движение в наружном направлении, связанное с крупными вихрями, обуславливает выпученный характер границы и вызывает расширение турбулентной зоны в направлении вниз по потоку. Движение в турбулентной зоне является существенно вихревым, тогда как снаружи этой зоны движение оказывается безвихревым. Каким образом происходит упомянутое увеличение турбулентной зоны? Медленные крупномасштабные движения в турбулентной зоне через посредство сил давления индуцируют эквивалентные движения в безвихревой области; благодаря этому амплитуда выпучин возрастает. Но в ходе этого процесса полный объем жидкости, охваченной турбулентным движением, должен оставаться неизменным, если не возникнут другие (пока еще не рассмотренные нами) эффекты, которые будут вызывать одновременное увеличение объема жидкости, охваченной турбулентным движением. Но единственным путем, которым безвихревая жидкость может превратиться в вихревую, является воздействие вязких сил сдвига, т. е. «непосредственный контакт» между вихревой и безвихревой жидкостью. При достаточно больших числах Рейнольдса влияние вязкости жидкости, охваченной турбулентным движением, ограничено мелкомасштабными движениями, т. е. наиболее мелкими вихрями. Следовательно, распространение «фронта» турбулентности под действием вязких сил сдвига может быть обусловлено лишь этими наиболее мелкими вихрями, а действительная граница между вихревой и безвихревой жидкостью должна носить характер поверхности раздела; иными словами, воздействие вязкости должно быть ограничено очень тонким слоем. Еще одно вытекающее отсюда следствие состоит в том, что фронт турбулентности должен быть неразрывным и что в безвихревом поле, расположенном снаружи турбулентного, не может образоваться каких бы то ни было изолированных областей турбулентности (Корсин и Кистлер [29]).

Толщина поверхности раздела, где сосредоточены вязкие силы сдвига, должна быть величиной того же порядка, что и размер наиболее мелких вихрей. Корсин и Кистлер показали, что эта толщина по порядку своей величины должна быть, вероятно, одинакова с колмогоровским масштабом длины η , который имеет порядок $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ [см. уравнение (3.102a)]. Они очень удачно назвали этот тонкий слой вязким надслоем, ввиду его сходства с вязким подслоем на твердой стенке, где, как и в данном случае, сконцентрированы вязкие направления сдвига. Однако между этими двумя слоями существует и различие, которое заключается в том, что вязкий подслой, если исключить обмен с жидкостью в полностью турбулентной зоне, состоит в основном из одних и тех же жидких частиц, тогда как в вязкий надслой из безвихревого поля, благодаря диффузионному распространению турбулентности в направлении этого поля, непрерывно вносятся новые жидкие частицы. Корсин и Кистлер [29]

произвели оценку скорости этого распространения; из соображений размерности она принята пропорциональной величине $(\nu\omega')^{1/2}$, где ω' — среднеквадратичное значение завихренности турбулентности.

Таким образом, распространение фронта турбулентности вызывает увеличение объема жидкости, охваченной турбулентным движением. В то же время более крупные вихри обуславливают крупномасштабную деформацию поверхности раздела, и в конечном счете медленные, наиболее крупные вихри вызывают образование больших выпучин. Эти крупные вихри определяют скорость распространения турбулентной зоны как целого (Таунсенд [9]). Как указывалось, снаружи турбулентной зоны индуцируется потенциальное течение. Скорость этого течения является величиной того же порядка, что и скорость крупномасштабного движения на другой стороне поверхности раздела; эта поверхность не создает разрыва скорости мелкого или крупного масштаба (Таунсенд [9], Филлипс [35], Стюарт [36]). Движение в безвихревом поле, вызванное полем неупорядоченно распределенной скорости вблизи поверхности раздела, было специально исследовано Филлипсом и Стюартом. Они обнаружили, что в непосредственной окрестности поверхности раздела пульсации скорости должны быть существенно анизотропными и следовать соотношению

$$\overline{u_2^2} = \overline{u_1^2} + \overline{u_3^2},$$

где u_2 — скорость, направленная по нормали к поверхности раздела. Стюарт показал, что это соотношение является прямым следствием требования безвихренности течения, когда пульсации в направлении осей x_1 и x_3 носят стационарный характер. Результаты измерений Таунсенда величин $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ в следе за цилиндром, по-видимому, удовлетворяют записанному выше соотношению в области малых значений коэффициента перемежаемости, а именно при $\Omega < 0,1$. Это также следует и из рис. 6.5. Однако относительно турбулентных пульсаций скорости, измеренных Корсином в круглой свободной струе, такого вывода сделать нельзя. Но можно заметить, что результаты этих измерений в наружной пограничной области струи являются не очень надежными.

Стюартом был получен интересный результат, который состоит в том, что в случае плоского следа в безвихревой зоне не наблюдается осредненного течения в направлении оси x_2 внутрь следа, когда условия течения в пределах следа являются автомодельными. Однако в случае круглой струи имеется осредненное безвихревое течение, направленное внутрь струи, по существу, перпендикулярно к ее оси.

Безвихревое течение между выпучинами жидкости, охваченной турбулентным движением, благодаря действию сил давления имеет тенденцию принимать то же осредненное направление, что и сами

выпучины. Основываясь на том, что уравнения, определяющие поведение пульсационных скоростей u_1 , u_2 и u_3 , имеют точно такой же вид, как и уравнения классической теории распространения гравитационных волн на поверхности воды, Стюарт пришел к выводу, что картина течения в области безвихревого движения вблизи границы турбулентности имеет тесное сходство с картиной течения при распространении гравитационных волн в воде.

Исходя из приведенных выше рассуждений о явлениях, наблюдающихся в перемежающейся пограничной зоне свободного турбулентного потока, можно представить себе картину этого течения, которая для случая плоского следа изображена на рис. 6.29.

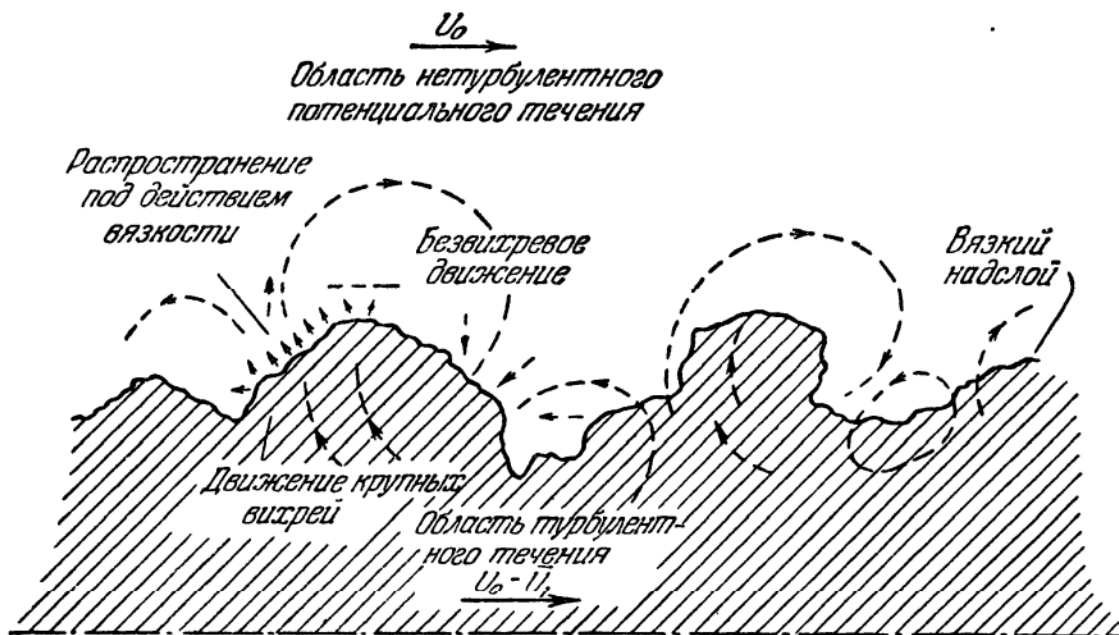


Рис. 6.29. Предполагаемая картина течения в перемежающейся пограничной зоне плоского следа.

Поскольку расширение турбулентной зоны в направлении вниз по потоку является преимущественно результатом крупномасштабных движений в турбулентной зоне, то логично ожидать, что это распространение представляет собой статистический процесс, определяемый статистическими законами турбулентности в турбулентной зоне. Корсином и Кистлером [29] было показано, что процесс этого распространения можно описать, как процесс лагранжевой диффузии, пользуясь при этом статистическими свойствами турбулентности в полностью турбулентной зоне. Изменение высоты выпучин носит статистический характер; с увеличением расстояния вниз по потоку эта высота, как и среднее положение поверхности раздела между турбулентным и нетурбулентным течениями, в среднем возрастает. Корсин и Кистлер определили нарастание среднеквадратичной высоты выпучин и среднее положение поверхности раздела (т. е. среднюю ширину турбулентной зоны) с увеличением расстояния от сочла для

случая круглой свободной струи. Зависимость величин $[(r^* - \bar{r}^*)^2]^{1/2}/d$ и \bar{r}^*/d , а также $r_{1/2}/d$ от x/d , где r^* — радиальное положение поверхности раздела в данный момент, изображена на рис. 6.30. В то время как изменение величины $r_{1/2}/d$ в зависимости от расстояния $(x/d - 3)$ до кажущегося источника носит строго линейный характер, данные о величинах \bar{r}^*/d и $(r^* - \bar{r}^*)'/d$ свидетельствуют, как видим, об ином виде этой зависимости, если в качестве начала координат выбрать тот же кажущийся источник. Однако, учитывая экспериментальные

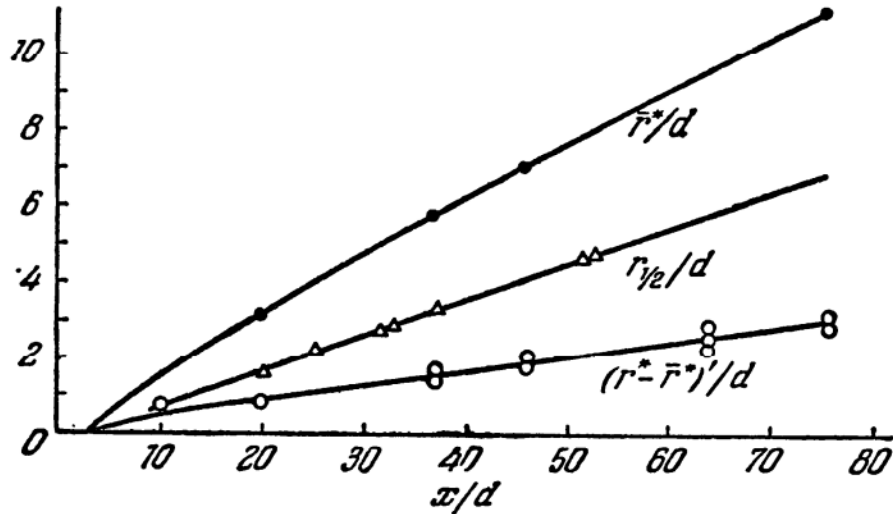


Рис. 6.30. Среднее положение фронта турбулентности и среднеквадратичная высота выпучин в круглой свободной струе в зависимости от x/d [29].

погрешности, эти относительные величины тоже можно приближенно рассматривать как линейные функции x/d .

При автомодельной турбулентности эти величины в случае плоского следа должны изменяться пропорционально $[(x + a)/d]^{1/2}$. Немногочисленных данных, полученных в опытах Таунсенда, к сожалению, недостаточно, чтобы проверить, выполняется ли эта зависимость в его экспериментах, но данные этих измерений, во всяком случае, не противоречат этой зависимости.

Ввиду статистического характера изменения высоты выпучин становится понятным и гауссово распределение коэффициента перемежаемости Ω . Согласно данным Корсина и Кистлера [29], экспериментальные зависимости для Ω в случаях круглой свободной струи и плоского следа близки к гауссову распределению. Кривые, изображенные на рис. 6.12 и 6.28, описываются следующей функцией распределения:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\xi_2 + \beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

где $\alpha\xi_2 + \beta = (r - \bar{r}^*)/(r^* - \bar{r}^*)'$, а α и β — постоянные.

Выше неоднократно указывалось на близкое совпадение между распределениями измеренной и вычисленной скорости в том случае, когда расчет производился на основании предположений о диффузии градиентного типа для импульса и о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, а также с учетом, помимо этого, поправки на перемежаемость.

Вычисление распределения скорости по уравнениям (6.29) или (6.62), в которые вместо величин $(\epsilon_m)_{11}$ и $(\epsilon_m)_{xx}$ подставляются $\Omega(\epsilon_m)_{11}$ и $\Omega(\epsilon_m)_{xx}$, а для Ω принимается записанное выше гауссово

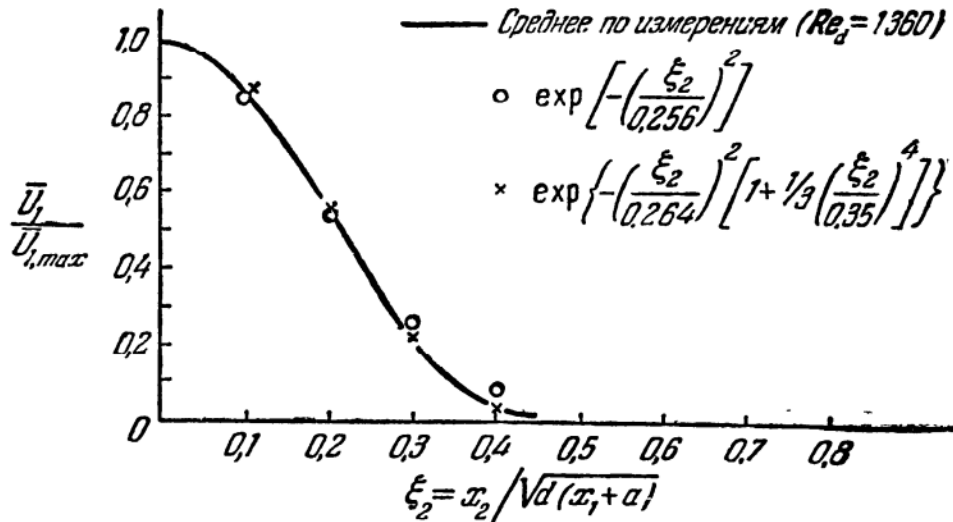


Рис. 6.31. Сравнение распределения измеренной осредненной скорости в следе за цилиндром с распределением, вычисленным при постоянном коэффициенте вихревой вязкости с поправкой и без поправки на влияние коэффициента перемежаемости [9].

распределение, является весьма трудоемким. Чтобы упростить процесс вычисления, Таунсенд в случае плоского следа аппроксимировал гауссово распределение для Ω функцией

$$\Omega \approx [1 + \text{const } \xi_2^4]^{-1}.$$

При этом интеграл в уравнении (6.29) берется без труда, и окончательный результат имеет вид

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp\left[-\frac{U_0 d \xi_2^2}{4(\epsilon_m)_{11}} \left(1 + \frac{1}{3} \text{const } \xi_2^4\right)\right].$$

Рис. 6.31 показывает, какое улучшение получается в том случае, когда вместо простого гауссова решения (6.29а) используется решение с поправкой на перемежаемость, а для $(\epsilon_m)_{11}$ при этом принимается несколько измененное значение; соответствующая кривая, изображенная на рис. 6.31, описывается формулой

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_{1, \max}} = \exp\left\{-\left(\frac{\xi_2}{0,264}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\xi_2}{0,35}\right)^4\right]\right\}.$$

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

- a — расстояние от кажущегося источника следа или струи до начала координат.
- c — $1/\sqrt{d(x_1 + a)}$ — для следа за цилиндром; $1/(x + a)$ — для струи; c_m — для импульса; c_γ — для скалярной субстанции; c_ω — для завихренности.
- d — диаметр цилиндра или сопла.
- $E_1(k_1)$ — одномерный энергетический спектр.
- k_1 — $2\pi n/\bar{U}_1$, волновое число.
- L_i — масштаб длины в направлении оси x_i .
- n — частота.
- P — статическое давление; \bar{P} — осредненная по времени величина; p — турбулентная пульсация; P_0 — давление в окружающей среде; P_s — давление во вторичном потоке.
- $\overline{q^2}$ — $\overline{u_i u_i}$, удвоенная кинетическая энергия турбулентности.
- R_{ij} — коэффициент тензора пространственной корреляции скорости второго ранга.
- Re_d — $U_p d/\nu$.
- r — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении.
- t — время.
- U_i — эйлерова скорость; \bar{U}_i — осредненная по времени величина; u_i — компонента турбулентной пульсации; $u'_i = \sqrt{\overline{u_i^2}}$, U_p — скорость первичного потока; U_s — скорость вторичного потока; индексы r, φ, x соответствуют системе цилиндрических полярных координат.
- x — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении; x_i — декартова координата.
- ϵ — диссипация под действием турбулентности, отнесенная к единице массы.
- ϵ_{ij} — тензор вихревой диффузии; $(\epsilon_{\mathcal{S}})_{ij}$ — для произвольной транспортабельной субстанции; $(\epsilon_m)_{ij}$ — для импульса; $(\epsilon_\gamma)_{ij}$ — для скалярной субстанции.
- η — $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.
- φ — цилиндрическая полярная координата в окружном направлении.
- Γ — скалярная субстанция; $\bar{\Gamma}$ — осредненная по времени величина; γ — турбулентная пульсация.
- Λ_g — пространственный поперечный интегральный масштаб.
- \mathcal{L} — коэффициент в «диффузионном» уравнении Рейхардта; \mathcal{L}_γ — для скалярной субстанции.

- l — путь смещения Прандтля; l_m — для импульса; l_γ — для скалярной субстанции; l_ω — для завихренности.
 μ — U_s/U_p .
 ν — кинематический коэффициент вязкости.
 Ω — коэффициент перемежаемости.
 \mathcal{P} — транспортабельная субстанция.
 ρ — плотность.
 σ_{ij} — тензор напряжений.
 τ — время.
 Θ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина; θ — турбулентная пульсация.
 \mathcal{U}_i — масштаб скорости в направлении оси x_i .
 \mathcal{V} — скорость крупномасштабных турбулентных движений.
 \mathcal{V}^* — кажущаяся скорость в наружном направлении для течения в следе.
 $\bar{\mathfrak{U}}^2 = 2U_0\bar{U}_1 + \bar{U}_1^2 + \bar{u}_1^2$.
 ν — масштаб турбулентной пульсации скорости.
 $\xi_1 = (x_1 + a)/d$; $\xi_2, x_2/\sqrt{d(x_1 + a)}$ — для течения в следе за цилиндром.
 $\xi_2 = r/(x + a)$ — для струи; $\xi'_1, x_1/d$; $\xi'_2, x_2/d$.
-

ГЛАВА 7

НЕИЗОТРОПНАЯ «ПРИСТЕНОЧНАЯ» ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 7.1. Введение

Термин «пристеночная» турбулентность соответствует турбулентности, на структуру которой непосредственное влияние оказывает наличие твердой границы. В зависимости от характера и конфигурации этой границы существуют разнообразные виды пристеночной турбулентности.

В последующем рассмотрении ограничимся, во-первых, случаем непроницаемой и негибкой, или жесткой, стенки. Даже на стенках этого ограниченного класса возможно существование многих типов турбулентных течений, однако все они могут быть разбиты на две основные группы. Одна из групп включает обтекание твердых тел, а другая объединяет течения в пространстве, ограниченном твердыми стенками.

Основное различие между этими двумя группами течений состоит в том, что в первом случае область существования пристеночной турбулентности увеличивается вдоль тела, в направлении вниз по потоку, в то время как во втором случае эта область пристеночной турбулентности остается в пределах пространства, ограниченного твердыми стенками.

Более определенно первую группу течений принято называть «течениями в пограничном слое», так как область пристеночной турбулентности остается в этом случае ограниченной относительно тонким слоем, находящимся на поверхности тела, хотя обычно толщина этого слоя и нарастает в направлении вниз по потоку; снаружи этого пограничного слоя существует невозмущенный свободный поток.

Простейшими типами течений, принадлежащих к каждой из этих двух групп, являются соответственно двумерное течение вдоль плоской пластины с нулевым градиентом давления в направлении вниз по потоку и течение в прямом двумерном канале или в круглой трубе с постоянным поперечным сечением. В последнем случае течение

в направлении вниз по потоку остается однородным по своей осредненной по времени структуре, за исключением некоторого входного участка.

Во-вторых, мы ограничимся здесь рассмотрением только двух простейших типов течения: течения «с постоянным давлением» вдоль плоской пластины и течения в прямой трубе с постоянным круглым поперечным сечением.

Причина выбора такого круга проблем состоит не только в том, что эти типы течений являются простейшими, но, главным образом, в том, что большинство имеющихся экспериментальных данных о пристеночной турбулентности ограничено именно этими случаями.

Третье ограничение, которое мы примем, — и оно тоже является довольно сильным — состоит в том, что мы будем рассматривать, в основном, полностью развитое турбулентное течение несжимаемой жидкости. Ни явление перехода, как таковое, ни влияние сжимаемости на структуру турбулентности не будут подвергнуты здесь исчерпывающему анализу.

Здесь, как и прежде, мы преследуем цель подробно, насколько это позволяют имеющиеся результаты экспериментальных исследований, рассмотреть механизм турбулентности и присущие ей процессы переноса. Современный уровень наших знаний об этом механизме в случае пристеночной турбулентности еще недостаточен для того, чтобы стать основой для создания строгой и законченной теории. Известные теории, которые описывают распределение осредненной по времени скорости и скалярной субстанции, а также соответствующие коэффициенты сопротивления все же являются по своей природе полуэмпирическими. На раннем этапе изучения турбулентности много пользы принесли различные теории пути смешения. Однако мы не будем заниматься подробным анализом этих теорий; исчерпывающие сведения о применении прандтлевской теории переноса импульса и тэйлоровской теории переноса завихренности к течениям в пограничном слое и в трубе можно найти в [1], а также и в других работах.

При турбулентном течении вдоль твердых стенок турбулентность находится под непосредственным влиянием стенки, по крайней мере в зоне, очень близкой к ней. В случае гладкой стенки это влияние проявляется через воздействие вязких напряжений, а в случае шероховатой стенки — через воздействие сил, возникающих при обтекании элементов шероховатости.

Для свободной турбулентности при достаточно больших числах Рейнольдса влиянием вязкости на общий характер и макроструктуру потока можно пренебречь. В случае же пристеночной турбулентности при любом числе Рейнольдса вблизи стенки всегда существует такая зона, характер течения в которой определяется вязкостью жидкости и, стало быть, числом Рейнольдса, если стенка является гладкой.

На некотором расстоянии от стенки непосредственное влияние вязкости жидкости на макроструктуру турбулентности может сильно ослабнуть и стать пренебрежимо малым; таким образом, при этом может наблюдаться некоторое сходство со свободным турбулентным течением.

Это сходство, действительно, может стать весьма тесным, особенно в случае течения в пограничном слое. Во внешней области этого течения, вблизи границы с невозмущенным свободным потоком, существует такое же взаимодействие между областью турбулентного течения и областью свободного потока, как и при свободной турбулентности. Как будет показано в § 7.7, это сходство послужило основой для одной из современных феноменологических теорий турбулентного течения в пограничном слое.

Близкое сходство со свободной турбулентностью наблюдается только для течения в пограничном слое; при течении в трубе, в котором нет границы с невозмущенным свободным потоком, оно намного слабее. Этот факт указывает на существенное различие между течениями в пограничном слое и в трубе.

Таким образом, в турбулентном потоке около гладкой твердой границы можно выделить три области: 1) прилегающую к стенке, крайне узкую область, течение в которой является преимущественно вязким; 2) область, также довольно ограниченную, в которой течение является турбулентным, но находится под непосредственным влиянием вязкости; это — область реального течения с пристеночной турбулентностью; 3) остальную область течения, содержащую обычно наибольшую часть течения, где непосредственное влияние вязкости пренебрежимо мало и наблюдается сходство со свободной турбулентностью. Течение в первых двух областях одинаково для пограничного слоя и потока в трубе и определяется только вязкостью и характером стенки. Свойства потока в третьей, наиболее удаленной от стенки области различны для этих двух типов течения.

В последующих параграфах мы рассмотрим сначала течение в пограничном слое, а затем течение в трубе.

§ 7.2. Приближенные уравнения движения и соответствующие интегральные соотношения

У этих двух типов течения имеется еще одно сходство со свободными турбулентными потоками, рассмотренными в главе 6, а именно: можно выделить основное направление течения, поперек которого область турбулентного течения является относительно очень узкой. Следовательно, для упрощения уравнений движения можно воспользоваться таким же способом, как и в случае свободного турбулентного потока.

Обратимся сначала к двумерному течению в пограничном слое на плоской пластине. Выберем такую систему координат, в которой ось x_1 направлена вдоль пластины, ось x_2 перпендикулярна к ней, а начало координат находится на поверхности пластины; его положение в направлении оси x_1 будем считать пока произвольным. Соответствующие компоненты скорости обозначим через U_1 и U_2 .

Если для осей x_1 и x_2 ввести соответственно масштабы длины L_1 и L_2 , то вследствие того, что область пограничного слоя является узкой, получим

$$\frac{L_2}{L_1} \ll 1.$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} = 0 \quad (7.1)$$

следует, что масштабы скорости u_1 и u_2 , а также компоненты осредненной скорости \bar{U}_1 и \bar{U}_2 должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{L_2}{L_1} \ll 1.$$

Хотя вблизи стенки степень неизотропности компонент турбулентных пульсаций скорости значительно выше, чем при свободной турбулентности (см. § 7.6), интенсивность турбулентности в различных направлениях все-таки одинакова по порядку величины; в соответствии с этим вполне допустимо ввести для пульсационных компонент u'_1 , u'_2 , u'_3 один и тот же масштаб скорости v .

Уравнение движения для несжимаемой жидкости в проекции на ось x_1 запишется так:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2} \right).$$

$$1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_1}{\rho u_1^2} \quad \frac{v^2}{u_1^2} \quad R_{12} \frac{v^2 L_1}{u_1^2 L_2} \quad \frac{L_1}{L_2} \frac{\nu}{u_1 L_2} \left(\frac{L_2^2}{L_1^2} \quad 1 \right)$$

Как и раньше, порядок величин отдельных членов указан под соответствующими слагаемыми.

Отсюда можно сделать вывод, что вязкие члены существенны лишь в том случае, когда число Рейнольдса $u_1 L_2 / \nu$, самое большее, порядка L_1 / L_2 . Кроме того, порядок v^2 / u_1^2 , самое большее, может быть равен L_2 / L_1 .

Уравнение движения в проекции на ось x_2 имеет вид

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_2 u_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial x_2^2} \right).$$

$$1 \quad 1 \quad \frac{\Delta P_2 L_1^2}{\rho \mathcal{U}_1^2 L_2^2} \quad R_{12} \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1}{L_2} \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{L_1}{L_2} \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 L_2} \left(\frac{L_2^2}{L_1^2} \quad 1 \right)$$

Как было указано выше, величина ν^2/\mathcal{U}_1^2 , самое большее, может иметь порядок L_2/L_1 , а чтобы вязкий член в уравнении движения в проекции на ось x_1 играл существенную роль, величина $\nu/\mathcal{U}_1 L_2$ должна быть, по меньшей мере, порядка L_2/L_1 . Следовательно, если величина $\nu/\mathcal{U}_1 L_2$ имеет порядок L_2/L_1 , то вязким членом во втором уравнении можно пренебречь, так как он на один порядок ниже,

чем турбулентный член $\frac{\partial \overline{u_2^2}}{\partial x_2}$. Однако когда величина $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ становится по порядку равной единице, то вязкий член необходимо учитывать. Но тогда из первого уравнения движения следует, что вязкий член становится в нем доминирующим, а все течение становится вязким. Это может наблюдаться в вязком слое, прилегающем к стенке.

В соседней турбулентной области, где вязкость все еще играет некоторую роль, число Рейнольдса $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ должно быть порядка L_1/L_2 . Тогда второе уравнение движения при сохранении только членов, наибольших по порядку величины, сводится к уравнению

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^2} = 0$$

или, после интегрирования,

$$\bar{P} + \rho \overline{u_2^2} = P_0, \quad (7.2)$$

где P_0 — давление в том же сечении снаружи турбулентной области.

Поскольку

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = \frac{dP_0}{dx_1} - \rho \frac{\partial \overline{u_2^2}}{\partial x_1},$$

а величина $\frac{\partial \overline{u_2^2}}{\partial x_1}$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x_1}$, и ею, следовательно, можно пренебречь, то первое уравнение движения упрощается:

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2}. \quad (7.3)$$

В области, наиболее удаленной от стенки, число Рейнольдса $\frac{\mathcal{U}_1 L_2}{\nu}$ может стать по порядку величины больше, чем L_1/L_2 , и тогда

вязким членом в уравнении (7.3) можно будет пренебречь; в этом случае уравнение движения идентично уравнению (6.13), которое было получено для свободного турбулентного потока.

Аналогичные упрощения могут быть внесены и в уравнение энергии. Рассмотрим вначале уравнение энергии для осредненного движения. В этом уравнении содержится член

$$\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2}(\bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2) \approx \frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{1}{2}\bar{U}_1^2,$$

так как $\bar{U}_2/\bar{U}_1 \ll 1$. Тогда это уравнение имеет вид (см. § 1.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{U}_1 \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{\bar{U}_1^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{U}_2 \left(\frac{\bar{P}}{\rho} + \frac{\bar{U}_1^2}{2} \right) = \\ \frac{\Delta P_1}{\rho \mathcal{U}_1^2} \quad 1 \quad \frac{\Delta P_2}{\rho \mathcal{U}_1^2} \quad 1 \\ = -\bar{U}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} \right) - \bar{U}_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \overline{u_2 u_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2^2} \right) + \\ \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \quad \frac{L_1}{L_2} \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \mathbf{R}_{12} \quad \frac{L_2}{L_1} \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \mathbf{R}_{12} \quad \frac{\nu^2}{\mathcal{U}_1^2} \\ + \nu \left\{ \bar{U}_1 \left[2 \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 L_2} \left\{ \frac{L_2}{L_1} \quad \frac{L_1}{L_2} \quad \frac{L_2}{L_1} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{U}_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial x_2^2} \right] \right\} \right\}. \\ \frac{L_2^3}{L_1^3} \quad \frac{L_2}{L_1} \quad \frac{L_2}{L_1} \end{aligned}$$

Выше уже было показано, что величина $\Delta P_2/\rho \mathcal{U}_1^2$ имеет порядок ν^2/\mathcal{U}_1^2 , а порядок этой величины равен, в свою очередь, L_2/L_1 . Если число Рейнольдса $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ имеет порядок L_1/L_2 [в этом случае вязкий член в уравнении (7.3) сохраняется], то, удерживая лишь члены наивысшего порядка, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{U}_1 \left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{\bar{U}_1^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{U}_2 \left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{\bar{U}_1^2}{2} \right) = -\bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} + \nu \bar{U}_1 \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2}. \quad (7.4)$$

Для области, удаленной от стенки, где величина $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ может стать намного больше, чем L_1/L_2 , вязким членом в уравнении (7.4), как и раньше, можно пренебречь.

Уравнение турбулентной энергии (1.98) в первом приближении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\overline{q^2}}{2} + \overline{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\overline{q^2}}{2} = & - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} + \\ & R_{12} \frac{L_1}{L_2} \frac{L_1}{L_2} \frac{v}{u_1} \\ & + v \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_j \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right)} - v \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}, \quad (7.5) \\ & \frac{v}{u_1 L_2} \frac{L_1}{l} \qquad \frac{v}{u_1 L_2} \frac{L_1 L_2}{l^2} \end{aligned}$$

где длина l — соответствующий масштаб изменений турбулентных пульсаций скорости в пространстве. Можно полагать, что, за исключением зоны, расположенной очень близко к стенке, этот масштаб будет значительно меньше масштаба длины L_2 и поэтому член, определяющий работу, совершаемую над единицей массы в единицу времени вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении, будет мал по сравнению с членом, характеризующим вязкую диссипацию.

Из приведенной выше оценки порядков величин различных членов можно сделать следующие интересные выводы.

Если коэффициент корреляции R_{12} , характеризующий напряжения сдвига, имеет порядок единицы, то порождение турбулентной энергии будет велико по сравнению с конвекцией турбулентной энергии осредненным движением; когда величина v^2/u_1^2 имеет порядок L_2/L_1 , конвективная диффузия под действием турбулентности мала. Указанные значения R_{12} наблюдаются в зоне, расположенной вблизи стенки, где, кроме того, величина $u_1 L_2/v$ имеет, самое большее, порядок L_1/L_2 . Следовательно, в зоне, расположенной очень близко к стенке, где проявляется значительное влияние вязкости, а величина v/u_1 не мала, масштабы длины L_2 и l одинаковы по порядку величины и влиянием конвекции под действием осредненного движения можно пренебречь; все остальные члены одинаковы по порядку величины при условии, что число Рейнольдса $u_1 L_2/v$ достаточно мало. Тогда уравнение энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} = \\ = v \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_j \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right)} - v \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \quad (7.5a) \end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения может быть преобразована так, чтобы образовались члены, величина которых легко поддается измерению

[см. уравнение (1.99)]; при этом получаем

$$\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} = \nu \frac{\partial^2 \bar{q}^2}{\partial x_2^2} - \nu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}. \quad (7.56)$$

С удалением от стенки отношение масштабов длины l/L_2 уменьшается, а величина ν^2/\mathcal{U}_1^2 становится порядка L_2/L_1 . В этом случае конвективная диффузия под действием турбулентности и работа, совершаемая вязкими напряжениями сдвига при турбулентном движении, тоже становятся малыми по сравнению с другими членами. Уравнение энергии при этом дополнительно упрощается:

$$\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} + \varepsilon = 0, \quad (7.6)$$

где с той же степенью приближения

$$\varepsilon \approx \varepsilon' = \nu \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}},$$

а отношение l/L_2 должно быть порядка $(L_2/L_1)^{1/2}$.

С другой стороны, в турбулентной области, удаленной от стенки, коэффициент корреляции R_{12} становится малым и уменьшается с возрастанием расстояния от стенки. В то же время число Рейнольдса $\mathcal{U}_1 L_2/\nu$ по порядку величины может стать больше, чем L_1/L_2 . В этой области пренебрежение ролью конвективных членов в общем балансе турбулентной энергии больше уже не является оправданным; поэтому в данном случае следует пользоваться более полным уравнением

$$\bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \bar{q}^2 + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} \bar{q}^2 = - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} - \varepsilon'. \quad (7.7)$$

В этом балансе энергии роль членов, определяющих порождение энергии и ее вязкую диссипацию, с возрастанием расстояния от стенки и с увеличением числа Рейнольдса ослабевает. В предельном случае это уравнение сводится лишь к балансу конвективного переноса турбулентной энергии под действием осредненного и турбулентного движений.

Интегральные соотношения

Интегрируя уравнения неразрывности (7.1), движения (7.3) и энергии (7.4) и (7.5) по x_2 поперек всего пограничного слоя, можно получить интересные и простые соотношения. Мы проделаем это для случая течения с нулевым градиентом давления, т. е. считая давление P_0 независимым от x_1 .

Проинтегрируем сначала уравнение неразрывности по x_2 от 0 до ∞ . Соответственно переменим при этом порядок интегрирования по x_2 и дифференцирования по x_1 . Таким образом, получим

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^{\infty} \bar{U}_1 dx_2 + \bar{U}_2 \Big|_0^{\infty} = 0,$$

откуда

$$(\bar{U}_2)_{\infty} = -\frac{d}{dx_1} \int_0^{\infty} \bar{U}_1 dx_2. \quad (7.8)$$

Обозначим через δ толщину пограничного слоя, т. е. то значение x_2 , при котором величина \bar{U}_1 практически равна скорости невозмущенного потока U_0 снаружи пограничного слоя.

Тогда интеграл

$$\int_0^{\delta} \bar{U}_1 dx_2$$

представляет собой полный расход жидкости через пограничный слой в направлении оси x_1 . Введем, помимо этого, длину δ' так, чтобы

$$U_0 \delta' = \int_0^{\delta} \bar{U}_1 dx_2.$$

Очевидно, что $\delta' < \delta$, и, следовательно, из-за торможения течения в пограничном слое линии тока в невозмущенном потоке снаружи пограничного слоя смещаются в положительном направлении оси x_2 на расстояние $\delta_d = \delta - \delta'$. Поскольку с увеличением x_2 скорость \bar{U}_1 стремится к скорости невозмущенного потока более или менее асимптотически, точное определение величины δ встречает затруднения. В этом отношении толщина δ_d является значительно более подходящим параметром, так как ее величина может быть определена совершенно точно. Из равенства

$$\delta_d U_0 = \delta U_0 - \delta' U_0 = \delta U_0 - \int_0^{\delta} \bar{U}_1 dx_2 = \int_0^{\delta} (U_0 - \bar{U}_1) dx_2$$

следует, что

$$\delta_d = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0}\right) dx_2 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0}\right) dx_2. \quad (7.9)$$

Величину δ_d по вполне очевидным причинам принято называть толщиной вытеснения пограничного слоя.

Интегрируя уравнение движения (7.3) и пользуясь при этом уравнением неразрывности, получаем

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^\infty \bar{U}_1^2 dx_2 + \bar{U}_1 \bar{U}_2 \Big|_0^\infty = - \overline{u_1 u_2} \Big|_0^\infty + \nu \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \Big|_0^\infty$$

или, поскольку $\overline{u_1 u_2} = 0$ при $x_2 = 0$ и при $x_2 = \infty$,

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^\infty \bar{U}_1^2 dx_2 + U_0 (\bar{U}_2)_\infty = - \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)_0.$$

С помощью соотношения (7.8) после некоторых преобразований окончательно получаем

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0} \right) dx_2 = \frac{\sigma_w}{\rho U_0^2}, \quad (7.10)$$

где σ_w — вязкое напряжение сдвига на стенке:

$$\sigma_w = \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)_0.$$

Введем теперь новую длину δ_m , определяемую выражением

$$\delta_m = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0} \right) dx_2. \quad (7.11)$$

Тогда соотношение (7.10) может быть переписано так:

$$\frac{d\delta_m}{dx_1} = \frac{\sigma_w}{\rho U_0^2}. \quad (7.10a)$$

Длина δ_m называется толщиной потери импульса пограничного слоя, так как величина $\rho U_0^2 \delta_m$ представляет собой полную потерю импульса жидкости в пограничном слое в сечении, соответствующем x_1 , которая компенсируется силой трения о стенку на всей длине x_1 .

Аналогично интегрирование уравнения энергии (7.4) приводит к определению еще двух параметров с размерностью длины, которые также можно рассматривать как характеристики пограничного слоя, а именно: толщины потери энергии δ_e ,

$$\delta_e = \int_0^\infty \frac{\bar{U}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\bar{U}_1^2}{U_0^2} \right) dx_2, \quad (7.12)$$

и толщины диссипации Δ ,

$$\Delta = \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\bar{U}_1}{U_0} \right)^2 dx_2 \right]^{-1}. \quad (7.13)$$

В уравнении энергии (7.4) члены с постоянным давлением P_0 выпадают в силу уравнения неразрывности. Тогда интегрирование по x_2 дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} \int_0^{\infty} \bar{U}_1^3 dx_2 + \frac{1}{2} (\bar{U}_2)_{\infty} U_0^2 = \\ = - \int_0^{\infty} \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_1 u_2} dx_2 + \nu \int_0^{\infty} \bar{U}_1 \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2} dx_2. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям оба члена в правой части этого уравнения и пользуясь при этом соотношением (7.8), имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} \int_0^{\infty} (\bar{U}_1^3 - \bar{U}_1 U_0^2) dx_2 = \int_0^{\infty} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} dx_2 - \nu \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 dx_2,$$

откуда, вводя толщину потери энергии (7.12) и толщину диссипации (7.13), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta_e}{dx_1} = - \frac{1}{U_0^3} \int_0^{\infty} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\nu}{U_0 \Delta}. \quad (7.14)$$

Толщина потери энергии δ_e и толщина диссипации Δ впервые были введены Вигхардтом [2] для случая ламинарного пограничного слоя, когда турбулентный член в правой части уравнения (7.14) равен нулю. С другой стороны, при больших числах Рейнольдса последний член в правой части уравнения (7.14) становится пренебрежимо малым, и толщина потери энергии определяется только турбулентным членом; в этом случае энергия турбулентности порождается за счет кинетической энергии осредненного движения.

Порождение энергии турбулентности можно при помощи интегральной формы уравнения (7.5) связать с вязкой диссипацией под действием турбулентности и с конвекцией турбулентной энергии под действием осредненного движения.

Интегрируя уравнение (7.5) и вновь используя уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^{\infty} \frac{\bar{q}^2}{2} \bar{U}_1 dx_2 = - \int_0^{\infty} \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} dx_2 - \int_0^{\infty} \varepsilon dx_2. \quad (7.15)$$

Объединение уравнений (7.14) и (7.15) приводит к уравнению, которое дает баланс полной энергии в турбулентном пограничном слое:

$$\frac{d}{dx_1} \left[\frac{\delta_e}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\overline{q^2 \bar{U}_1}}{U_0^3} dx_2 \right] = \frac{\nu}{U_0 \Delta} + \int_0^\infty \frac{\epsilon}{U_0^3} dx_2. \quad (7.16)$$

При больших числах Рейнольдса членом $\nu/U_0 \Delta$, характеризующим вязкую диссипацию под действием осредненного движения, можно пренебречь.

Рассмотрим теперь течение в прямой круглой трубе с постоянным поперечным сечением. При этом осредненное по времени течение будем считать осесимметричным. Воспользуемся цилиндрической системой координат, начало которой расположено в некоторой точке на оси трубы, а ось x совпадает с направлением осредненного потока.

Предположим, что осредненное течение является однородным и, стало быть, осевая компонента скорости \bar{U}_x не зависит от x . Тогда из уравнения неразрывности следует, что радиальная компонента $\bar{U}_r = 0$. Следовательно, уравнения движения для осевого и радиального направлений запишутся соответственно следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\overline{ru_r u_x}) + \nu \left(\frac{d^2 \bar{U}_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{U}_x}{dr} \right)$$

и

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \overline{u_r^2}) + \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r}.$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$\bar{P}(x, r) + \rho \overline{u_r^2} - \rho \int_r^{\frac{1}{2} D} \frac{\overline{u_r^2} - \overline{u_\varphi^2}}{r} dr = \bar{P}_0(x), \quad (7.17)$$

где \bar{P}_0 — зависящее от x статическое давление на стенке, а D — диаметр поперечного сечения трубы. Тогда первое уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \bar{P}_0}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\overline{ru_r u_x}) + \nu \left(\frac{d^2 \bar{U}_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{U}_x}{dr} \right)$$

или, после умножения на r и интегрирования по r ,

$$\frac{r}{2} \frac{d \bar{P}_0}{dx} = -\overline{\rho u_r u_x} + \mu \frac{d \bar{U}_x}{dr}. \quad (7.18)$$

В силу предположения об однородности условий осредненного течения в осевом направлении, оба члена в правой части уравнения (7.18)

зависят только от r . Следовательно, давление $\bar{P}_0(x)$ должно быть линейной функцией x , что вполне очевидно. Таким образом, если положить $r = \frac{1}{2} D$ и проинтегрировать уравнение (7.18) по x , то получим

$$\bar{P}_0(x) - \bar{P}_0(0) = \frac{4}{D} \mu \left[\frac{d\bar{U}_x}{dr} \right]_{r=1/2D} x = -\frac{4}{D} \sigma_w x. \quad (7.19)$$

После введения этого выражения для $\bar{P}_0(x)$ в уравнение (7.17) оно принимает вид

$$\bar{P}(x, r) - \bar{P}_0(0) = -\frac{4\sigma_w}{D} x - \rho \bar{u}_r^2 + \rho \int_r^{\frac{1}{2}D} \frac{\bar{u}_r^2 - \bar{u}_\varphi^2}{r} dr. \quad (7.17a)$$

Уравнение турбулентной энергии, как и соответствующее уравнение для течения в пограничном слое, можно сильно упростить. В области, расположенной очень близко к стенке, течение является практически двумерным и не отличается от течения в пограничном слое. Значит, для этой области может быть применено то же приближенное уравнение энергии (7.5а). Для области, более удаленной от стенки, но все же достаточно близкой к ней, чтобы течение можно было приблизительно считать двумерным, следует ожидать аналогичного результата, но с меньшей степенью сходства. К этой последней области в пограничном слое применимо упрощенное уравнение энергии (7.6).

Для основной части турбулентной области течения в трубе должно выполняться уравнение, аналогичное уравнению (7.7), а именно:

$$\overline{u_x u_r} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\overline{u_r \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} \right] + \epsilon' = 0, \quad (7.20)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \\ &= \nu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} \right)^2 \right]. \quad (7.21) \end{aligned}$$

§ 7.3. Ламинарный пограничный слой и явление перехода

Прежде чем рассматривать турбулентный пограничный слой на плоской пластине, целесообразно сделать несколько общих замечаний о пограничных слоях и дать распределение скорости в ламинарном пограничном слое на плоской пластине при отсутствии градиента давления.

Если обратиться к пограничному слою на твердом теле, то в направлении вниз по потоку в нем можно выделить несколько областей. Начиная от критической точки, толщина пограничного слоя в направлении вниз по потоку увеличивается. Течение в пограничном слое вначале является ламинарным, но, начиная с некоторой точки, оно становится неустойчивым и при наличии возмущений может перейти в турбулентное. Положение этой точки на теле зависит от скорости потока, от кривизны поверхности и от степени турбулентности в свободном потоке снаружи пограничного слоя. После перехода течения в турбулентное толщина пограничного слоя нарастает более интенсивно, чем прежде.

Если поверхность тела является по отношению к невозмущенному потоку выпуклой либо если в направлении течения существует неблагоприятный положительный градиент давления, то возникает возможность «отрыва» пограничного слоя от этой поверхности. При этом наблюдается переход в третью область.

Когда тело представляет собой плоскую пластину, помещенную в равномерный параллельный поток, то градиент давления в направлении течения отсутствует и отрыва пограничного слоя не наблюдается; толщина пограничного слоя при этом неограниченно возрастает. В этом случае имеются только ламинарная и турбулентная области, разделенные относительно короткой переходной зоной.

Как уже указывалось во введении к этой главе, мы не намерены рассматривать теорию устойчивости ламинарного пограничного слоя и перехода течения в турбулентное. Мы ограничимся лишь тем, что приведем эмпирическую формулу для определения расстояния от критической точки до той точки, в которой в пограничном слое наблюдается переход к турбулентности. Поскольку процессы переноса в ламинарной и турбулентной областях пограничного слоя различны, то для изучения переноса необходимо знать, в какой точке наступает переход к турбулентному течению.

Явление перехода может наступить в том случае, когда число Рейнольдса для течения в пограничном слое превысит некоторое критическое значение. Общеприняты следующие два определения числа Рейнольдса для течения в пограничном слое: (1) по толщине пограничного слоя, т. е.

$$Re_{\delta} = \frac{U_0 \delta}{\nu}, \quad Re_{\delta_d} = \frac{U_0 \delta_d}{\nu}, \quad Re_{\delta_m} = \frac{U_0 \delta_m}{\nu}$$

и т. д., и (2) по расстоянию x_1 от критической точки, т. е.

$$Re_{x_1} = \frac{U_0 x_1}{\nu}.$$

Критическое значение Re_{x_1} для возникновения турбулентности в ламинарном пограничном слое на плоской пластине, помещенной

в аэродинамической трубе, было определено Шубауэром и Скрэмстедом [3]. Они проделали этот опыт при различных условиях состояния турбулентности в невозмущенном потоке, которые характеризовались только относительной интенсивностью турбулентности, определенной как отношение $(1/3\overline{q^2})^{1/2}/U_0$, где $\overline{q^2} = \overline{u_i u_i}$.

Эти результаты показаны на рис. 7.1. Критическое значение Re_{x_1} , соответствующее наступлению перехода, по-видимому, уже перестает зависеть от относительной интенсивности турбулентности невозмущенного потока, когда эта интенсивность становится меньше приблизительно 0,1%. Данные, представленные на рис. 7.1, указывают на то, что, когда турбулентность невозмущенного потока

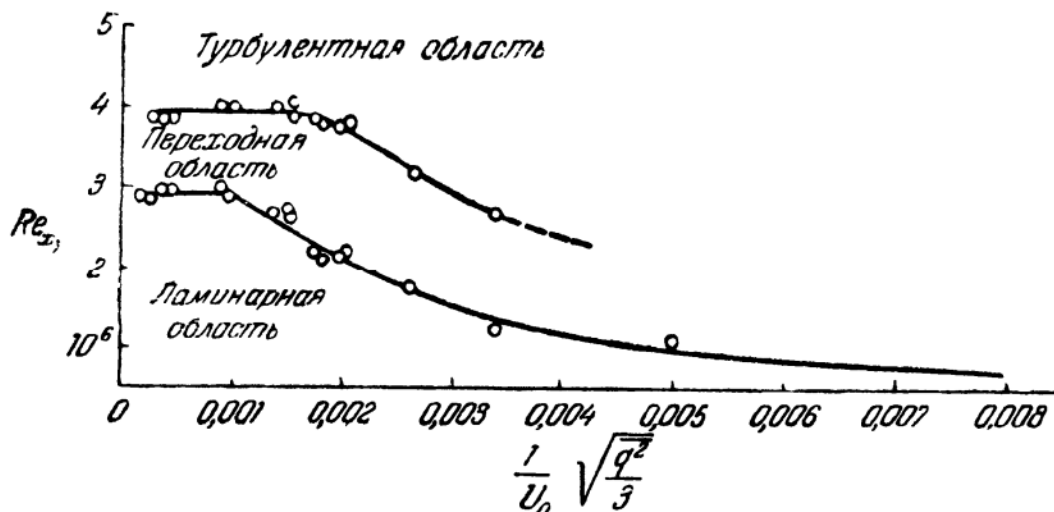


Рис. 7.1. Влияние турбулентности невозмущенного потока на переход ламинарного пограничного слоя на плоской пластине в турбулентный при отсутствии градиента давления [3].

начинает способствовать переходу ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное, относительная интенсивность турбулентности свободного потока должна составлять, по меньшей мере, 0,2%.

Когда относительная интенсивность турбулентного свободного потока составляет 0,5%, критическое значение Re_{x_1} уменьшается от $3 \cdot 10^6$ до $\approx 10^6$. По данным Драйдена [4], эта величина уменьшается приблизительно до 10^5 , когда относительная интенсивность турбулентности возрастает до 3%.

Зная критическое значение Re_{x_1} , можно вычислить критическую длину $x_{\text{крит}}$:

$$(x_1)_{\text{крит}} = \frac{\nu}{U_0} (Re_{x_1})_{\text{крит}}$$

В случае ламинарного пограничного слоя величины Re_δ и Re_{x_1} не являются независимыми. Чтобы установить связь между ними, требуется знать распределение скорости в пограничном слое как функции от x_1 и x_2 , что позволило бы получить соотношение между δ и x_1 .

Согласно приближенной теории пограничного слоя, уравнение движения в проекции на ось x_1 записывается в виде

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}.$$

Блазиусу [5, 14] удалось получить из этого уравнения и соответствующих граничных условий решение для U_1 . Это решение, которое выражается через независимую переменную

$$\eta = \frac{1}{2} x_2 \left(\frac{U_0}{\nu x_1} \right)^{1/2},$$

состоит из двух частей: решения в виде степенного ряда для малых значений η и асимптотического решения для больших значений η .

Степенной ряд для малых η имеет вид

$$U_1 = \frac{U_0}{2} \left(\frac{\alpha \eta}{1!} - \frac{\alpha^2 \eta^4}{4!} + 11 \frac{\alpha^3 \eta^7}{7!} - 375 \frac{\alpha^4 \eta^{10}}{10!} + \dots \right), \quad (7.22a)$$

где $\alpha = 1,328$.

Асимптотическое решение для больших η записывается в форме

$$U_1 = U_0 \left\{ 1 + \nu \int_{\infty}^{\eta} \exp[-(\eta - \beta)^2] d\eta \right\}. \quad (7.22b)$$

При $\beta = 0,865$ и $\nu = 0,461$ эти два решения дают одинаковые значения U_1 и $\partial U_1 / \partial x_2$ в некоторой точке, где оба они еще применимы.

Согласно решению Блазиуса, скорость U_0 достигается асимптотически. Поэтому при определении толщины δ необходимо условиться о той величине отклонения от постоянной скорости свободного потока, которую следует принять, когда хотят получить конечное значение этой толщины.

Для $\eta = 2,75$ Блазиус получил значение $U_1 = 0,997 U_0$. Таким образом, когда допустимое отклонение принимается равным 0,3%, получаем

$$\delta = 5,5 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}. \quad (7.23)$$

Вместо трудно определяемой толщины δ лучше пользоваться толщиной вытеснения δ_d или толщиной потери импульса δ_m . Для этих параметров пограничного слоя в случае распределения скорости по Блазиусу получаются следующие формулы:

$$\delta_d = 1,731 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}} \quad (7.24)$$

и

$$\delta_m = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}, \quad (7.25)$$

откуда вытекает, что

$$\delta_d = 0,31\delta, \quad \delta_m = 0,12\delta, \quad \delta_d = 2,6\delta_m.$$

Отношение $H = \frac{\delta_d}{\delta_m}$ обычно рассматривается как параметр, характеризующий распределение скорости в пограничном слое; оно называется формпараметром.

Любая из формул (7.23) — (7.25) показывает, что толщина пограничного слоя при увеличении x_1 возрастает по параболическому закону.

Соотношение между Re_{x_1} и, например, Re_δ находится без труда и имеет вид

$$Re_\delta = 5,5 (Re_{x_1})^{1/2}. \quad (7.26)$$

Следовательно, критическая величина Re_δ при переходе ламинарного течения в турбулентное при относительной интенсивности турбулентности свободного потока, равной нулю и 3%, составляет соответственно 11 000 и 1700.

§ 7.4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Классические теории

Из анализа, изложенного в § 7.2, следует, что в пограничном слое можно выделить определенные области течения. Этот факт был установлен сравнительно давно Прандтлем, Карманом и другими исследователями; при этом было проведено много экспериментальных работ, из которых наиболее существенные принадлежат Никурадзе [6].

Течение жидкости, прилегающей к стенке, должно быть в основном вязким, ибо у стенки все скорости, в том числе и турбулентные пульсации, обращаются в нуль; то же самое можно сказать и о числе Рейнольдса, отнесенном к местной скорости и расстоянию от стенки. Эта область преимущественно вязкого течения не обладает равномерностью ни по времени, ни по расстоянию вдоль стенки. Однако в любом сечении можно выделить осредненную по времени толщину этой области. Область, о которой идет речь, называется вязким подслоем, а ее осредненная толщина обозначается обычно через δ_l *). Таким образом, при $x_2 < \delta_l$ течение можно полагать вязким.

В области $x_2 > \delta_l$ влияние вязкости на течение с увеличением расстояния от стенки будет постепенно ослабляться. В конце концов достигается область, течение в которой является полностью турбу-

*) Индекс l соответствует ламинарному течению, так как этот слой первоначально называли ламинарным подслоем. Как будет показано ниже, течение в этом слое является не ламинарным в строгом смысле этого слова, а лишь вязким. Поэтому термин «ламинарный подслой» оказывается не очень подходящим.

лентным, а влияние вязкости — пренебрежимо малым. Промежуточная область, где течение не является ни полностью вязким, ни полностью турбулентным, называется переходной. Обозначим через δ_t среднее расстояние от стенки, вне которого течение является полностью турбулентным; тогда протяженность переходной области определится неравенством

$$\delta_l < x_2 < \delta_t.$$

Средняя толщина вязкого подслоя δ_l может быть меньше или больше средней высоты элементов шероховатости стенки k . Распределение скорости вблизи стенки будет зависеть от этой шероховатости, особенно когда средняя высота k больше толщины вязкого подслоя. Следовательно, при анализе распределения скорости в турбулентном пограничном слое необходимо проводить различие между пограничными слоями на гладкой и на шероховатой стенках.

Рассмотрим сначала пограничный слой на гладкой стенке. Логично предположить, что течение вблизи стенки будет определяться главным образом напряжением сдвига на стенке σ_w , расстоянием от стенки x_2 и коэффициентом вязкости жидкости μ . Помимо этого считается, что, так как область, близкая к стенке, является очень тонкой, напряжение сдвига в потоке можно полагать приблизительно постоянным и равным напряжению сдвига на стенке.

В вязком подслое, где течение является полностью вязким, распределение скорости в первом приближении определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \sigma_{12} \approx \sigma_w,$$

откуда следует, что это распределение описывается линейной зависимостью от расстояния до стенки:

$$U_1 = \frac{\sigma_w}{\mu} x_2$$

или

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \frac{u^* x_2}{\nu}, \quad (7.27)$$

где

$$u^* = \left(\frac{\sigma_w}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (7.28)$$

Величина u^* , которая имеет размерность скорости, называется динамической скоростью *).

Для турбулентной области пограничного слоя, т. е. для $x_2 > \delta_t$, но в достаточной близости от стенки, так, чтобы выполнялось

) Этот термин принят в отечественной литературе. По терминологии автора величина u^ называется «скоростью трения о стенку» (wall-friction velocity). (Прим. перев.)

предположение о постоянстве напряжения сдвига, можно записать

$$(\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = \frac{\sigma_w}{\rho}.$$

Очевидно, что предположение о постоянстве коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$, которое, как и прежде, привело бы к линейному распределению скорости, является неудовлетворительным, ибо такое распределение противоречило бы экспериментальным результатам.

Но коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ связан с переносом импульса от одного слоя к другому. Этот перенос определяется диффузией жидких частиц под действием турбулентности. В главе 5 было показано, что при малых расстояниях диффузии, т. е. при непродолжительном времени диффузии, диффузия развивается пропорционально времени и, если ввести коэффициент вихревой диффузии, его зависимость от расстояния оказывается линейной [см., например, уравнение (5.56)]. Поскольку мы имеем здесь дело с областью, находящейся на небольшом расстоянии от стенки, так что диффузия жидких частиц внутри этой области ограничена малыми расстояниями, то можно воспользоваться предположением о пропорциональности коэффициента вихревой диффузии расстоянию x_2 , надеясь получить при этом результат лучше, нежели в предположении о постоянстве коэффициента вихревой диффузии.

Эквивалентный результат получается, если предположить, что в этой близкой к стенке области размер крупных вихрей, которыми как раз и обусловлена вихревая вязкость, изменяется пропорционально расстоянию от стенки. При этом следует отметить, что механизмы течения, с которыми связаны это и первое предположения, отличаются друг от друга.

Таким образом, будем полагать, что

$$(\epsilon_m)_{11} = \chi u^* x_2. \quad (7.29)$$

Тогда уравнение для распределения скорости запишется так:

$$\chi u^* x_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = \frac{\sigma_w}{\rho} = u^{*2}$$

или, в безразмерных величинах,

$$\chi x_2^+ \frac{\partial \bar{U}_1^+}{\partial x_2^+} = 1, \quad (7.30)$$

где

$$\bar{U}_1^+ = \frac{\bar{U}_1}{u^*}, \quad x_2^+ = \frac{u^* x_2}{\nu}. \quad (7.31)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\bar{U}_1^+ = \frac{1}{\chi} \ln x_2^+ + \text{const} \quad \text{при} \quad x_2 > \delta_t. \quad (7.32)$$

Аналогичное решение было получено Прандтлем, который, однако, воспользовался для этой цели своей теорией переноса импульса. Согласно этой теории,

$$\sigma_{12} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|.$$

Далее, Прандтль принял основанное на интуитивных соображениях предположение о том, что путь смещения l_m на столь малых расстояниях от стенки должен быть пропорционален расстоянию. Соотношения $l_m = \kappa x_2$ и $\sigma_{12} \approx \sigma_w = \rho u_*'^2$ приводят к тому же дифференциальному уравнению (7.30) и, следовательно, к такому же логарифмическому распределению скорости (7.32). Если вместо предположения Прандтля о пути смещения l_m принять выражение для этого пути смещения (5.12), предложенное Карманом, то мы вновь получим логарифмическое распределение скорости.

Предположение Прандтля, по существу, одинаково с предположением (7.29), ибо

$$(\epsilon_m)_{11} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| = \kappa^2 x_2^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|,$$

откуда при распределении скорости вида (7.32) получается соотношение (7.29).

Для турбулентного пограничного слоя на шероховатой стенке опять-таки можно воспользоваться аналогичным предположением относительно коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ или пути смещения l_m . Но если средняя высота элементов шероховатости значительно больше толщины вязкого подслоя, т. е. $k > \delta_v$, то логично ожидать, что влияние вязкости будет отсутствовать; поэтому выражение для распределения скорости не должно содержать коэффициента вязкости жидкости, но в него должен входить параметр шероховатости k . Следовательно, в этом случае логарифмическое распределение скорости должно записываться в виде

$$\bar{U}_1^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_2}{k} + \text{const.} \quad (7.33)$$

Когда стенка является шероховатой, то в определении местоположения плоскости $x_2 = 0$ имеется неопределенность. Если не оговаривается какой-либо иной способ, то будет предполагаться, что элементы шероховатости «присоединены» к воображаемой гладкой стенке, поверхность которой располагается на линии $x_2 = 0$. Это предположение не приводит ни к каким осложнениям, коль скоро элементы шероховатости не обладают слишком неправильной формой и не являются чересчур крупными.

Согласно решениям (7.32) и (7.33), распределения скорости в последовательно расположенных сечениях пограничного слоя

подобны, по крайней мере в области, близкой к стенке, где напряжение сдвига приблизительно постоянно. Поэтому указанную область часто называют слоем постоянного напряжения. Этот слой относительно тонок; остальная, вернее сказать, основная часть турбулентного пограничного слоя может иметь распределение скорости, отличное от логарифмического. Никакой эквивалентной теории для этой части пограничного слоя Прандтлю предложить не удалось; однако экспериментальные данные позволили обнаружить, что распределение скорости в последовательных сечениях и в этом случае обладает близким подобием, если в качестве характеристики скорости выбрать разность между местной осредненной скоростью и скоростью свободного потока (а не их отношение), т. е.

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = \Psi\left(\frac{x_2}{\delta}\right). \quad (7.34)$$

Эта формула подобия известна как закон избыточной скорости. Заметим, что это соотношение вытекает также и из уравнений (7.32) и (7.33), хотя эти уравнения, строго говоря, несправедливы для внешней области пограничного слоя.

Во введении к этой главе, а также в § 7.2 упоминалось о сходстве условий течения во внешней области пограничного слоя и в свободном турбулентном потоке. Поэтому можно ожидать, что если принять предположение о постоянстве коэффициента вихревой диффузии, то полученное при этом решение для распределения скорости будет вполне удовлетворительным. В этом случае следует пользоваться уравнением (7.3), в котором опущены члены, связанные с давлением и вязкостью; при этом в уравнение целесообразно вместо \bar{U}_1/U_0 ввести величину $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0$. Анализ, основанный на этих предположениях, будет дан ниже, в § 7.6, посвященном более поздним теориям турбулентного пограничного слоя.

Как уже отмечалось, до сих пор отсутствуют теории, эквивалентные теориям для слоя постоянного напряжения, которые позволяли бы найти распределение скорости в области, где справедлив закон избыточной скорости. По всей вероятности, в этом и не чувствовалось прямой необходимости, ибо с практической, инженерной точки зрения логарифмическое распределение скорости дает, по-видимому, вполне удовлетворительные результаты, даже применительно к области с непостоянным напряжением сдвига. Как будет показано в следующем параграфе, наблюдающиеся при этом отклонения от действительного распределения скорости малы, а получающееся в результате среднее значение скорости в поперечном сечении пограничного слоя, которым пользуются при инженерных расчетах, оказывается достаточно близким к действительной величине.

Логарифмические распределения скорости (7.32) и (7.33) носят универсальный характер, будучи зависимыми лишь от условий на

стенке и от расстояния до стенки. Постоянные, содержащиеся в выражениях (7.32) и (7.33), являются числами. В самом деле, эти выражения можно получить общеизвестным методом из соображений размерности на основании некоторых предположений общего характера, не вдаваясь в подробности структуры течения. Подобные соображения были высказаны Миллиkenом [7].

Миллиken постулировал универсальное распределение скорости, определяемое лишь числом Рейнольдса, относительным расстоянием от стенки и относительной шероховатостью стенки. Общее выражение для такого универсального распределения скорости записывается в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f\left(\delta^+, \xi_2, \frac{k}{\delta}\right), \quad (7.35)$$

где $\delta^+ = u^* \delta / \nu$ и $\xi_2 = x_2 / \delta$. Это универсальное распределение скорости должно наблюдаться в той области, где влияние вязкости пренебрежимо мало, т. е. при $x_2 > \delta_t$.

В случае гладкой стенки это общее выражение упрощается:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f(\delta^+, \xi_2). \quad (7.36)$$

Таким образом, для $\xi_2 = 1$ отсюда следует, что

$$\frac{U_0}{u^*} = f \sqrt{\delta^+}. \quad (7.37)$$

Это соотношение определяет закон сопротивления стенки, так как

$$u^* = \left(\frac{\sigma_w}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Дадим теперь точное определение соотношения (7.36) для области, прилегающей к стенке, и для области, расположенной вдали от нее.

Для области, близкой к стенке, воспользуемся предположением Прандтля о том, что условия течения вблизи стенки определяются лишь местным значением числа Рейнольдса $\frac{u^* x_2}{\nu}$. Ввиду того, что $u^* x_2 / \nu = \delta^+ \xi_2$, то, согласно этому предположению, для течения вблизи стенки должно выполняться соотношение

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \varphi(\delta^+ \xi_2). \quad (7.38)$$

Для области, удаленной от стенки, Миллиken принял закон избыточной скорости (7.34), в выражение которого не входит δ^+ .

Предположим, далее, что для области $x_2 > \delta_t$ справедливы оба соотношения (7.34) и (7.38), вытекающие из общей формулы (7.36), причем первое из них соответствует той части этой области, которая

удалена от стенки, а второе — части, прилегающей к стенке. Поскольку функция, описывающая распределение скорости, должна быть непрерывна, то необходимо, чтобы существовала некоторая зона, которая может быть малой, но все же конечной, где соотношения (7.34) и (7.38) дают одинаковые результаты. Общее соотношение (7.36) в этой зоне должно иметь такую форму, чтобы быть совместимым с обеими формулами (7.38) и (7.34). Это условие, по-видимому, полностью определяет форму зависимости (7.36). Таким образом, поскольку соотношения (7.36) или (7.37), (7.38) и (7.34) одновременно должны выполняться в одной и той же области, то из формулы (7.34) следует, что

$$f(\delta^+) - \varphi(\delta^+ \xi_2) = \Psi(\xi_2).$$

Но первый член в левой части этого уравнения зависит только от δ^+ , а член в правой части — только от ξ_2 . Если это уравнение продифференцировать сначала по δ^+ , а затем по ξ_2 , то получим два соотношения:

$$f'(\delta^+) = \xi_2 \varphi'(\delta^+ \xi_2)$$

и

$$\Psi'(\xi_2) = -\delta^+ \varphi'(\delta^+ \xi_2).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\xi_2 \Psi'(\xi_2) = -\delta^+ f'(\delta^+),$$

которое может выполняться лишь в том случае, когда каждая из его частей представляет собой численную постоянную. Таким образом,

$$\Psi'(\xi_2) = \frac{\text{const}}{\xi_2} \quad \text{и} \quad f'(\delta^+) = \frac{\text{const}}{\delta^+}; \quad \text{следовательно,}$$

$$\varphi'(\delta^+ \xi_2) = \frac{\text{const}}{\delta^+ \xi_2},$$

откуда

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \varphi(\delta^+ \xi_2) = A \ln(\delta^+ \xi_2) + B,$$

или

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = A \ln\left(\frac{u^* x_2}{\nu}\right) + B, \quad (7.32a)$$

что в точности совпадает с уравнением (7.32).

Аналогичные соображения могут быть применены и в отношении распределения скорости в пограничном слое на шероховатой стенке. Если обратиться к случаю шероховатой стенки, у которой эффективный вязкий подслой отсутствует и распределение скорости, стало

быть, не зависит от числа Рейнольдса, то можно записать

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f\left(\frac{k}{\delta}, \xi_2\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{U_0}{u^*} = f\left(\frac{k}{\delta}\right).$$

Для области вблизи стенки распределение скорости определяется главным образом ее шероховатостью; поэтому можно положить

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \varphi\left(\frac{x_2}{k}\right) = \varphi\left(\xi_2 \frac{\delta}{k}\right).$$

Из этих соотношений и закона избыточной скорости (7.34), применяя такие же рассуждения, что и использованные выше в отношении распределения скорости на гладкой стенке, получаем

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = A_1 \ln\left(\frac{x_2}{k}\right) + B_1. \quad (7.39)$$

По смыслу вывода этого уравнения очевидно, что универсальное логарифмическое распределение скорости справедливо лишь в малой области, близкой к стенке. Более того, согласно выводу, это распределение ограничено областью слоя с постоянным напряжением. Но даже и здесь оно становится несправедливым при $x_2 < \delta_l$, т. е. в области, наиболее близкой к стенке, где существует непосредственное влияние вязкости на распределение скорости.

В прошлом было выдвинуто немало предположений о распределении скорости в области $x_2 < \delta_l$. При расчете теплообмена в пограничном слое на гладкой стенке Карман [8] аппроксимировал распределение скорости в переходной области $\delta_l < x_2 < \delta_l^+$ прямой линией в координатах $(\bar{U}_1^+, \ln x_2^+)$, считая, таким образом, что скорость \bar{U}_1^+ просто пропорциональна $\ln x_2^+$. Гофман [9] и Рейхардт [10] предложили иные функции для определения \bar{U}_1^+ в переходной области, а именно полином третьей степени от переменной $(x_2^+ - \delta_l^+)$ и экспоненту; однако это не привело к существенному прогрессу.

Ротта [11] высказал предположение, что в переходной области полное напряжение сдвига определяется совместным влиянием вязкости и турбулентности. Для описания влияния турбулентности он воспользовался прандтлевской гипотезой пути смешения и принял, что

$$\sigma_{12} = \rho \left[\nu + l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| \right] \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \approx \sigma_w, \quad (7.40)$$

где $l_m = \kappa(x_2 - \delta_l)$. Таким образом, при $x_2 \leq \delta_l$ течение считается полностью вязким. Тогда решение для \bar{U}_1 записывается в виде

$$\bar{U}_1^+ = \frac{1}{2\kappa l_m^+} \left(1 - \sqrt{1 + 4l_m^{+2}} \right) + \frac{1}{\kappa} \ln \left(2l_m^+ + \sqrt{1 + 4l_m^{+2}} \right) + \delta_l^+, \quad (7.41)$$

где $l_m^+ = u^* l_m / \nu$ и $\delta_l^+ = u^* \delta_l / \nu$. Аналогичное решение, основанное на том же предположении, что и принятое Ротта, было дано позднее Майлсом [24].

До сих пор предполагалось, что толщина вязкого подслоя δ_l имеет определенную величину; в соответствии с этим предположением, турбулентное движение при $x_2 < \delta_l$ должно отсутствовать вовсе. Однако давно известно, что подобное представление неверно отражает действительную картину течения вблизи стенки, ибо турбулентные пульсации продолжают существовать в пределах этого слоя, даже когда они сильно демпфируются под влиянием вязкости. Поэтому при построении функции, описывающей распределение осредненной скорости, было бы более логично не проводить резкого различия между вязким подслоем и переходным слоем.

При изучении влияния турбулентности, исчезающей при приближении к стенке, на перенос тепла Гофман [9] принял для распределения скорости другую функцию, а именно полином третьей степени от x_2^+ . В более поздних работах Рейхардт [12] и Элрод [25] показали, что поскольку компоненты турбулентных пульсаций скорости должны удовлетворять уравнению неразрывности, то коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2^+ \rightarrow 0$ должен возрастать, как $(x_2^+)^3$, когда в направлении потока существует градиент $\partial/\partial x_1$ осредненных по времени характеристик турбулентности, в то время как при отсутствии каких-либо изменений в направлении течения величина $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2^+ \rightarrow 0$ должна возрастать пропорционально $(x_2^+)^4$. При больших значениях x_2^+ изменение величины $(\epsilon_m)_{11}$ по мере приближения к области вне переходного слоя должно монотонно переходить в линейную зависимость от x_2^+ . Таким образом, Рейхардтом была принята следующая функция:

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu} = \kappa \left(x_2^+ - \delta_l^+ \operatorname{th} \frac{x_2^+}{\delta_l^+} \right). \quad (7.42)$$

Распределение скорости получается из формулы

$$\sigma_{12} = [\mu + \rho (\epsilon_m)_{11}] \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \approx \sigma_w. \quad (7.43)$$

Интеграл, получающийся при решении этого дифференциального уравнения, не удается выразить в замкнутой форме. Чтобы преодолеть это затруднение, Рейхардт аппроксимировал подынтегральное выражение функцией, представляющей собой сумму экспонент от x_2^+ и легко поддающейся интегрированию. Полученное им окончательное

выражение для распределения скорости имеет вид

$$\bar{U}_1^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa x_2^+) + c \left[1 - \exp\left(-\frac{x_2^+}{\delta_l^+}\right) - \frac{x_2^+}{\delta_l^+} \exp(-0,33x_2^+) \right], \quad (7.44)$$

где c — численная постоянная.

Несколько иная формула для коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ была предложена Дайслером [13], который тоже попытался учесть влияние турбулентности, затухающей в направлении к стенке. Дайслер принял, что

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu} = a \bar{U}_1^+ x_2^+ \left[1 - \exp(-a \bar{U}_1^+ x_2^+) \right], \quad (7.45)$$

где a — численная постоянная. Это выражение показывает, что при $x_2^+ \rightarrow 0$ величина $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ должна изменяться пропорционально $(x_2^+)^4$, в отличие от предложенного Рейхардтом выражения (7.42), согласно которому величина $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ должна изменяться пропорционально $(x_2^+)^3$. Распределение скорости получается при этом из уравнения (7.43) численным интегрированием.

Еще одно решение было предложено Ван Драйстом [26], который принял видоизмененное выражение для пути смешения l_m в прандтлевской теории пути смешения:

$$l_m = \kappa x_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right) \right],$$

откуда

$$(\epsilon_m)_{11} = \kappa^2 x_2^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right) \right]^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right|.$$

В этом случае величина $(\epsilon_m)_{11}$ при $x_2 \rightarrow 0$ тоже пропорциональна x_2^4 , что совпадает с результатом, полученным Рейхардтом и Элродом для тех условий, когда изменения осредненных по времени характеристик турбулентности в направлении осредненного течения либо вообще отсутствуют, либо ими можно пренебречь. Решение, полученное на основании предположения Ван Драйста, записывается в виде

$$\bar{U}_1^+ = 2 \int_0^{x_2^+} \frac{dx_2^+}{1 + \left\{ 1 + 4\kappa^2 x_2^{+2} \left[1 - \exp\left(-\frac{x_2^+}{A}\right) \right]^2 \right\}^{1/2}}.$$

Распределение скорости в переходной области в случае пограничного слоя на шероховатой стенке рассматривалось лишь в работе Ротта [11]. Он предположил, что вследствие шероховатости

путь смещения, содержащийся в выражении (7.40), при $x_2 = 0$ не обращается в нуль, а имеет некоторую конечную величину l_0 , т. е.

$$l_m = l_0 + \kappa x_2.$$

Тогда решение уравнения (7.40), если $\bar{U}_1^+ = 0$ при $x_2 = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^+ = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{1}{l_m^+} - \frac{1}{l_0^+} \right) - \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{(1 + 4l_m^{+2})^{1/2}}{l_m^+} - \frac{(1 + 4l_0^{+2})^{1/2}}{l_0^+} \right] + \\ + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{2l_m^+ + (1 + 4l_m^{+2})^{1/2}}{2l_0^+ + (1 + 4l_0^{+2})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Сравнение логарифмического распределения скорости, а также различных распределений скорости, полученных для переходной области, с экспериментальным распределением скорости будет дано в следующем параграфе. Здесь следует упомянуть лишь об одном из результатов этого сравнения, а именно о том, что логарифмическое распределение скорости вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальным распределением в областях, удаленных от стенки на расстояния значительно большие, нежели те, для которых оно должно быть строго справедливо, т. е. в областях, где предположение о постоянстве касательного напряжения, несомненно, уже неприменимо. Отклонения, наблюдающиеся даже на очень больших расстояниях от стенки, все же довольно малы, и поэтому в практических случаях обычно считают, что логарифмическое распределение скорости справедливо для всего пограничного слоя, за исключением переходной области.

При логарифмическом распределении скорости (7.32а) соотношение (7.37), определяющее сопротивление стенки, принимает вид

$$\frac{U_0}{u^*} = A \ln(\delta^+) + B. \quad (7.47)$$

Сопротивление стенки обычно выражают через коэффициент трения c_f , определяемый формулой

$$\sigma_w = c_f \frac{1}{2} \rho U_0^2. \quad (7.48)$$

Между c_f и u^*/U_0 существует следующая связь:

$$c_f = 2 \left(\frac{u^*}{U_0} \right)^2. \quad (7.49)$$

Поскольку

$$\delta^+ = \frac{u^*}{U_0} \frac{U_0 \delta}{\nu} = \frac{u^*}{U_0} \text{Re}_\delta,$$

то из соотношений (7.49) и (7.47) следует, что

$$\frac{c_f}{2} = \left[\frac{A}{2} \ln \left(\frac{c_f}{2} \right) + A \ln \text{Re}_\delta + B \right]^{-2}. \quad (7.50)$$

В случае пограничного слоя на шероховатой стенке соотношения, соответствующие (7.47) и (7.50), выражаются соответственно формулами

$$\frac{U_0}{u^*} = A \ln \left(\frac{\delta}{k} \right) + B_1 \quad (7.51)$$

и

$$\frac{c_f}{2} = \left[A \ln \left(\frac{\delta}{k} + B_1 \right) \right]^{-2}. \quad (7.52)$$

Численную постоянную A_1 , содержащуюся в соотношении (7.39), положим теперь равной A , так как, согласно закону избыточной скорости, величина $(U_0 - \bar{U}_1)/u^*$ не должна зависеть от свойств стенки. Далее, можно получить выражения для среднего значения осредненной скорости в поперечном сечении пограничного слоя $\bar{U}_{1, \text{ср}}$, толщины вытеснения δ_d , толщины потери импульса δ_m и формпараметра H . Они записываются так:

а) для гладкой стенки

$$\frac{\bar{U}_{1, \text{ср}}}{u^*} = A \ln \delta^+ + B - A = \frac{U_0}{u^*} - A; \quad (7.53a)$$

б) для шероховатой стенки

$$\frac{\bar{U}_{1, \text{ср}}}{u^*} = A \ln \frac{\delta}{k} + B_1 - A = \frac{U_0}{u^*} - A. \quad (7.53б)$$

Отсюда следует, что для гладкой стенки, как и для шероховатой,

$$\frac{\bar{U}_{1, \text{ср}}}{U_0} = 1 - A \frac{u^*}{U_0} = 1 - A \sqrt{\frac{c_f}{2}}. \quad (7.54)$$

Еще одно следствие закона избыточной скорости состоит в том, что выражения для толщины вытеснения и толщины потери импульса одинаковы для гладкой и шероховатой стенок:

$$\frac{\delta_d}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0} \right) d\xi_2 = A \frac{u^*}{U_0}, \quad (7.55)$$

$$\frac{\delta_m}{\delta} = \int_0^1 \frac{\bar{U}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\bar{U}_1}{U_0} \right) d\xi_2 = A \frac{u^*}{U_0} \left(1 - 2A \frac{u^*}{U_0} \right) = \frac{\delta_d}{\delta} \left(1 - 2 \frac{\delta_d}{\delta} \right). \quad (7.56)$$

Формпараметр H принимает вид

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} = \left(1 - 2A \frac{u^*}{U_0}\right)^{-1} = \left(1 - 2 \frac{\delta_d}{\delta}\right)^{-1}. \quad (7.57)$$

В случае гладкой стенки отношение $\frac{u^*}{U_0}$ зависит от Re_δ , а в случае шероховатой стенки — от $\frac{\delta}{k}$. Следовательно, величины δ_d/δ , δ_m/δ и H для гладкой и шероховатой стенок являются функциями соответственно Re_δ и δ/k .

Согласно соотношению (7.56), динамическую скорость u^*/U_0 можно выразить через δ_m/δ . Тогда при помощи уравнений (7.10а) и (7.47) можно получить дифференциальное уравнение для δ , которое могло бы дать решение для δ как функции x_1 . Однако решения в замкнутой форме получить не удастся, иными словами, логарифмическое распределение скорости не приводит к простой связи между δ и x_1 .

Однако такую простую связь удастся установить, если воспользоваться старым предположением относительно распределения скорости, а именно, что оно может быть представлено простым степенным законом (см., например, [14], стр. 404):

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = C \left(\frac{u^* x_2}{\nu}\right)^{1/n} = C (\delta^+ \xi_2)^{1/n}. \quad (7.58)$$

При этом показатель степени $1/n$ может, однако, зависеть от числа Рейнольдса. Логарифмическое распределение скорости можно, по-видимому, аппроксимировать подобным степенным законом на большей части поперечного сечения пограничного слоя. Однако распределение скорости вида (7.58) не позволяет получить закон избыточной скорости, который был бы независим от условий на стенке.

Из уравнения (7.58) имеем

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = \xi_2^{1/n} \quad (7.59)$$

и

$$\frac{\bar{U}_{1, \text{ср}}}{U_0} = \frac{n}{n+1}. \quad (7.60)$$

Кроме того,

$$\frac{U_0}{u^*} = C_1 \text{Re}_\delta^{1/(n+1)},$$

так что соотношение для коэффициента трения о стенку принимает вид

$$\frac{c_f}{2} = C_1^{-2} \text{Re}_\delta^{-2/(n+1)}. \quad (7.61)$$

Для толщины вытеснения δ_d и толщины потери импульса δ_m получаем следующие формулы:

$$\frac{\delta_d}{\delta} = \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{\delta_m}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \quad (7.62)$$

откуда

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} = \frac{n+2}{n}.$$

Увеличение δ_d и δ_m при возрастании x_1 можно вычислить из уравнения (7.10а):

$$\frac{d\delta_m}{dx_1} = C_1^{-2} \text{Re}_\delta^{-2/(n+1)} = C_1^{-2} \left[\frac{n}{(n+1)(n+2)} \right]^{2/(n+1)} \left(\frac{U_0 \delta_m}{\nu} \right)^{-2/(n+1)}.$$

Однако величина n в этом уравнении зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, от x_1 . Но эта зависимость оказывается настолько слабой, что уравнение можно проинтегрировать, как если бы величина n была постоянной. В результате интегрирования получаем

$$\left(\frac{U_0 \delta_m}{\nu} \right)^{(n+3)/(n+1)} = \left(\frac{U_0 \delta_{m0}}{\nu} \right)^{(n+3)/(n+1)} + C_2 \frac{U_0}{\nu} (x_1 - x_{10}), \quad (7.63)$$

где

$$C_2 = C_1^{-2} \frac{n+3}{n+1} \left[\frac{n}{(n+1)(n+3)} \right]^{2/(n+1)}.$$

Если $\delta_{m0} = 0$ при $x_{10} = 0$, то уравнение (7.63) можно записать следующим образом:

$$\frac{U_0 \delta_m}{\nu} = \left(C_2 \frac{U_0}{\nu} x_1 \right)^{(n+1)/(n+3)}. \quad (7.63a)$$

Точно такие же выражения, но с другими значениями постоянной C_2 получаются для δ и δ_d .

§ 7.5. Экспериментальные данные о распределении осредненной скорости

В ходе многолетних исследований было собрано очень много данных о распределении осредненной скорости в турбулентном пограничном слое. Для пограничного слоя на гладкой пластине при отсутствии градиента давления имеются экспериментальные данные, полученные Людвигом и Тилманом [15], Шубауэром и Клебановым [16], Клебановым и Дилем [17], Шульц-Груновым [18], Алленом и Катлендом [19] и Хама [20]. За исключением Людвига и Тилмана, которые в своих опытах сумели осуществить измерения настолько близко от стенки, что получили данные для переходной области, все

остальные экспериментаторы производили измерения лишь в полностью турбулентной области пограничного слоя.

Результаты измерений, проведенных Людвигом и Тилманом, Клебановым и Дилем, а также Шульц-Груновым и относящихся к расположенной вблизи стенки области «постоянного напряжения», показаны на рис. 7.2. В полностью турбулентной области экспериментальные точки тесно группируются вблизи универсального логарифмического распределения скорости (7.32) или (7.32a), по

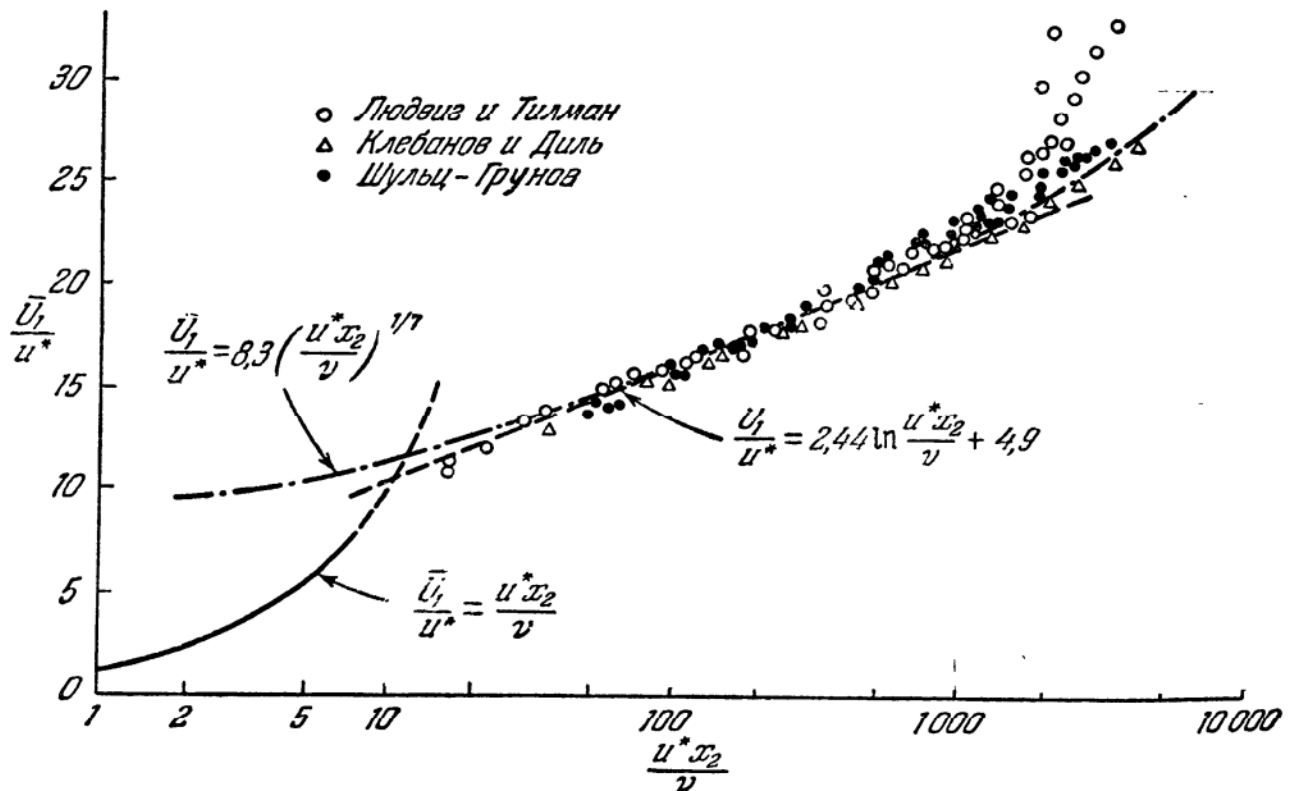


Рис. 7.2. Распределение осредненной скорости вблизи гладкой стенки.

крайней мере при не слишком больших значениях $u^* x_2 / \nu$. Использованные при построении теоретического распределения скорости по уравнению (7.32a) значения постоянных A и B взяты по Клаузюру [21]; они представляют собой результат осреднения по экспериментальным данным различных исследователей. В этом случае уравнение (7.32a) имеет вид

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = 2,44 \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + 4,9. \quad (7.64)$$

Однако другие авторы отдают предпочтение другим значениям этих постоянных, которые лучше соответствуют их собственным экспериментальным данным. В этом и состоит причина заметного разброса значений A и B . Согласно Таунсенду [31], многие из результатов наблюдений указывают на то, что значение B , по-видимому, ближе к 7, нежели к 4,9. Мнения о величине постоянной A

или «универсальной» постоянной κ в уравнении (7.32) менее различимы. В более ранних исследованиях обычно принималось значение $A = 2,5$ или $\kappa = 0,4$, полученное на основании опытов Никурадзе [6] для течения в трубе.

Величина B , по-видимому, связана с толщиной вязкого подслоя. Это становится особенно очевидным в свете теории Ротта распределения скорости вблизи стенки. При больших значениях u^*x_2/ν формула (7.41) упрощается:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^*x_2}{\nu} + \frac{1}{\kappa} (\ln 4\kappa - 1) + \frac{u^*\delta_l}{\nu}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что постоянная B в идентичном уравнении (7.32а) должна записываться как

$$B = \frac{1}{\kappa} (\ln 4\kappa - 1) + \frac{u^*\delta_l}{\nu}.$$

Ротта на основании опытных данных Никурадзе принял значения $\kappa = 0,4$ и $u^*\delta_l/\nu = 6,7$; тогда $B = 5,37$. Но в то же время сам Никурадзе для характеристики средней толщины вязкого подслоя предложил значение $u^*\delta_l/\nu = 5$. В этом случае, опять-таки при $\kappa = 0,4$, получается $B = 3,68$. При $\kappa = 0,41$ и предложенном Клаузером значении $B = 4,9$ соответствующая величина $u^*\delta_l/\nu$, согласно теории Ротта, составляет 6,2.

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 7.2, соответствуют различным значениям числа Рейнольдса Re_δ . По-видимому, никакого иного влияния числа Рейнольдса, кроме его воздействия на u^* , не проявляется, как это и должно быть согласно представлениям, на основании которых получено логарифмическое распределение скорости.

На рис. 7.3 показано распределение скорости в вязком подслое и в прилегающей к нему переходной области. Поскольку каких-либо опытных данных для пограничного слоя на плоской пластине в этом случае не имеется, то вместо них здесь приводятся данные для течения в гладком двумерном канале и в гладкой круглой трубе, полученные соответственно Рейхардтом [12] и Лауфером [41]. Согласно современным представлениям, при этом не должно наблюдаться никакого отличия.

Рассмотрение этого рисунка позволяет сделать вывод о том, что ввиду разброса экспериментальных точек можно принять любое значение $u^*\delta_l/\nu$ из диапазона от 5 до 6,7. Этот же вывод, по-видимому, справедлив и в отношении теоретических кривых, предложенных Рейхардтом, Ротта и Дайслером, ибо ни одна из этих кривых не имеет большого расхождения с экспериментальными данными. Насколько можно судить, кривая Дайслера несколько лучше

согласуется с данными Рейхардта, а кривая Рейхардта — с данными Лауфера.

Толщина переходной области обычно принимается равной $u^* \delta_t / \nu \approx 30$; следовательно, при $u^* x_2 / \nu > 30$ течение считается полностью турбулентным.

Как показывает рис. 7.2, за пределами значений $u^* x_2 / \nu$ от 500 до 1000 экспериментальные данные начинают отклоняться от логарифмического распределения скорости; действительные значения

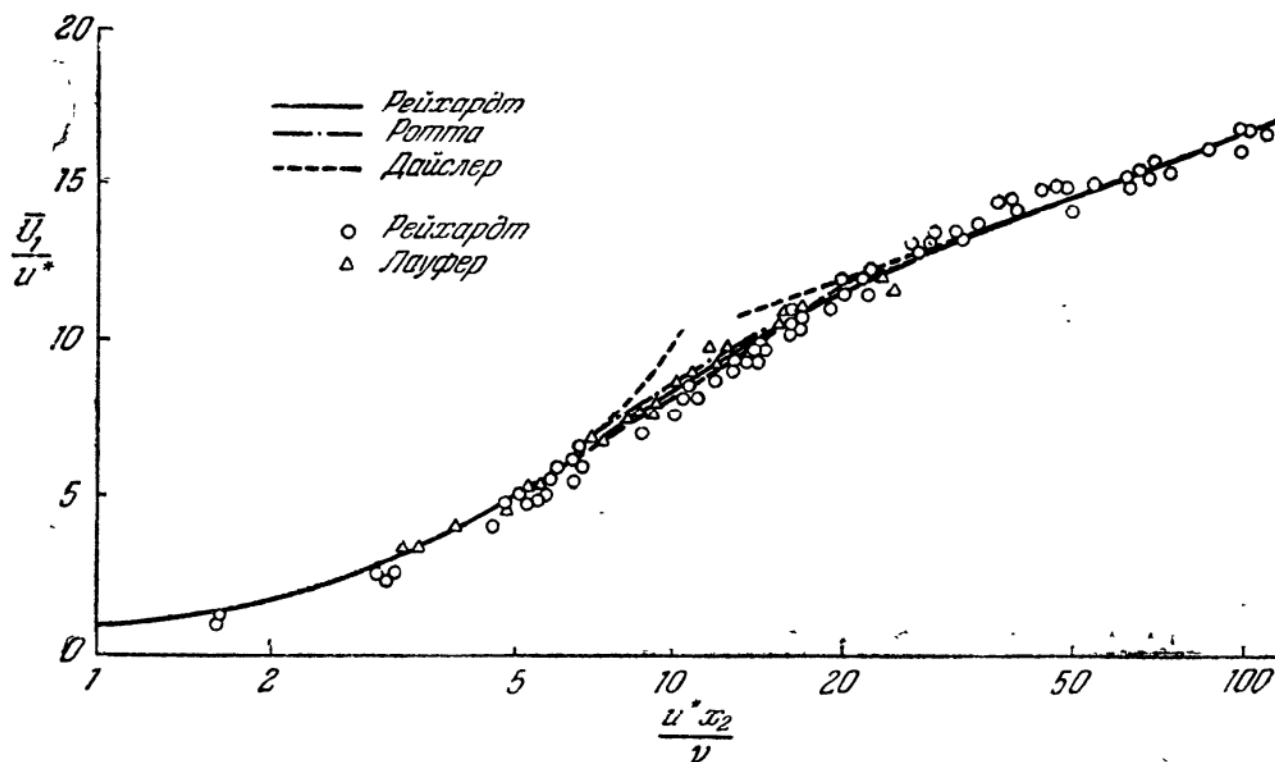


Рис. 7.3. Сравнение теоретических распределений скорости в переходной области турбулентного пограничного слоя с экспериментальными данными Рейхардта [12] для течения в канале и Лауфера [41] для течения в трубе.

скорости становятся здесь выше, чем они должны быть по логарифмическому распределению скорости. На том же рисунке нанесена также кривая, соответствующая простому степенному закону (7.58), а именно:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = 8,3 \left(\frac{u^* x_2}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (7.65)$$

Значение $C = 8,3$ получается в том случае, если совместить распределение скорости, соответствующее степенному закону, с логарифмическим распределением скорости в диапазоне значений $u^* x_2 / \nu$ от 100 до 1000, частично перекрывающем различные области течения. Величина $n = 7$ получается в случае закона сопротивления Блазиуса для течения вдоль гладкой пластины [см. уравнение (7.61)]:

$$c_f \sim \left(\frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^{-1/4}.$$

Из анализа рис. 7.2 можно заключить, что выписанный выше степенной закон распределения скорости не только дает такие же удовлетворительные результаты в диапазоне изменения u^*x_2/ν от 100 до 1000, но в области, где $u^*x_2/\nu > 1000$, приводит даже к несколько лучшему соответствию с опытными данными. В указанной области степенной закон, как видим, дает результаты, весьма близкие к опытным данным Клебанова и Дилья.

Встречающиеся в литературе значения постоянных C и n в уравнении (7.58) опять-таки значительно отличаются друг от друга. Приняв, что закон сопротивления Блазиуса для гладких труб справедлив и для течения вдоль гладкой пластины, Шлихтинг [14] получил значение $C = 8,74$; Клебанов и Дилья рекомендуют величину $C = 8,16$. Постоянные C и n должны зависеть от числа Рейнольдса. Закон сопротивления Блазиуса лишь в первом приближении не зависит от числа Рейнольдса, и то лишь в определенном диапазоне его изменения. Согласно Вигхардту [22], при возрастании числа Рейнольдса происходит существенное увеличение значений C и n . Однако для небольших величин u^*x_2/ν Вигхардт рекомендует одно и то же значение $n = 7,7$ для течения вдоль плоской пластины с положительным, отрицательным и нулевым градиентами давления. Клаузер [21] пришел к выводу, что для C и n нельзя предложить универсальных значений, так как для различных распределений скорости, рассмотренных им, величина n , например, может изменяться от 3 до 10.

При больших значениях u^*x_2/ν логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного; во внешней области пограничного слоя оно, по-видимому, уже несправедливо. Для этой области, вероятно, целесообразнее ввести в рассмотрение избыточную скорость $(U_0 - \bar{U}_1)/u^*$, а не отношение \bar{U}_1/u^* . Для промежуточной области, где справедливо логарифмическое распределение скорости, из соотношения (7.32а) также имеем

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -A \ln \frac{x_2}{\delta}. \quad (7.66)$$

Но поскольку величина U_0/u^* , полученная из уравнения (7.32а) при $x_2 = \delta$ не равна действительному значению U_0/u^* , то и нельзя ожидать хорошего согласия логарифмического распределения скорости с экспериментальным, если в уравнение (7.66) подставить действительные значения U_0/u^* . Чтобы учесть различие между действительной величиной U_0/u^* и величиной, соответствующей уравнению (7.66), надо дополнить это уравнение некоторым поправочным членом. Таким образом, вместо уравнения (7.66) следует записать

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -A \ln \frac{x_2}{\delta} + B^*. \quad (7.66a)$$

На рис. 7.4 в полулогарифмическом масштабе показаны универсальные распределения скорости, которые были получены Клаузе-ром [21] по данным Клебанова и Диля, Шульц-Грунова, Хама и других авторов как для гладких, так и для шероховатых пластин.

При $x_2/\delta < 0,15$ экспериментальные значения тесно группируются (область, занимаемая опытными точками, представлена штриховой полосой) около кривой, представляющей логарифмическое распределение вида

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -2,44 \ln \frac{x_2}{\delta} + 2,5. \quad (7.67)$$

Значение $x_2/\delta \approx 0,15$, выше которого это логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного, соответствует

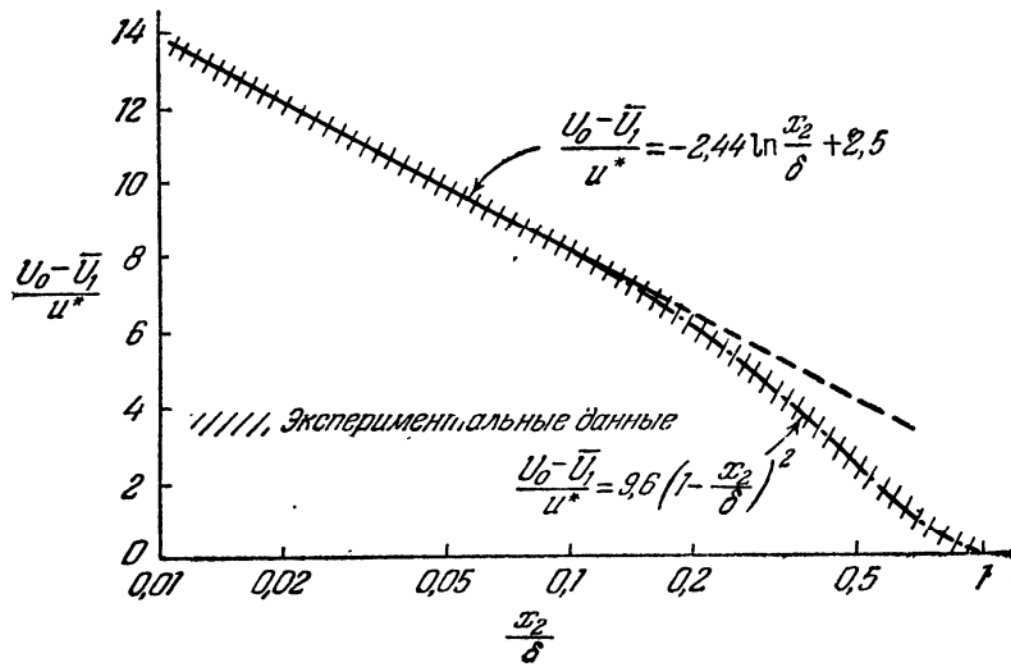


Рис. 7.4. Распределение скорости во внешней части турбулентного пограничного слоя в полулогарифмическом масштабе [21].

приближенному значению $u^* x_2/\nu = 750$ (см. рис. 7.2). Эта величина x_2/δ , по-видимому, характеризует в первом приближении границу между пристеночной и внешней областями.

Хама [20] предложил следующую простую эмпирическую формулу для распределения осредненной скорости в диапазоне $x_2/\delta > 0,15$:

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = 9,6 \left(1 - \frac{x_2}{\delta}\right)^2. \quad (7.68)$$

Это распределение скорости тоже показано на рис. 7.4, из рассмотрения которого можно сделать вывод, что в этом случае действительно получается весьма удовлетворительное, во всяком случае для практических целей, соответствие с экспериментальными данными.

Если к распределению избыточной скорости мы теперь захотим применить степенной закон (7.59), то следует предварительно учесть влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени n , которое проявляется в других соотношениях через динамическую скорость u^* . На рис. 7.2 подобная кривая показана для $n = 7$; как видим, она удовлетворительно согласуется с опытными данными Клебанова и Дила. Эти данные относятся к числу Рейнольдса $Re_\delta = 152\,000$, которое приблизительно соответствует $Re_{x_1} = 10^7$.

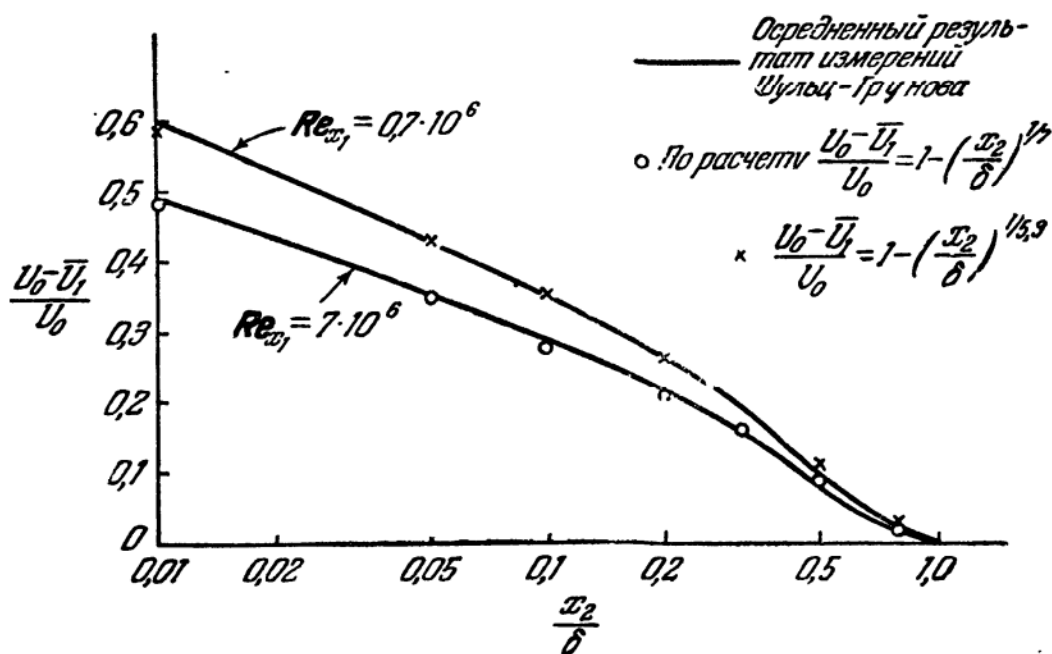


Рис. 7.5. Сравнение распределения скорости, соответствующего степенному закону, с результатами опытов Шульц-Грунова [18].

На рис. 7.5 в полулогарифмическом масштабе представлены кривые, аналогичные изображенным на рис. 7.4 и построенные по экспериментальным данным Шульц-Грунова при $Re_{x_1} = 0,7 \cdot 10^6$ и $Re_{x_1} = 7 \cdot 10^6$. Совпадение с распределением скорости по степенному закону при $n = 7$ наблюдается только в случае данных, соответствующих $Re_{x_1} = 7 \cdot 10^6$; для данных, соответствующих $Re_{x_1} = 0,7 \cdot 10^6$, необходимо брать величину $n = 5,3$. Этот результат наглядно демонстрирует влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени n . В самом деле, любое влияние, оказываемое на u^*/U_0 , должно проявляться в изменении показателя n ; поэтому в действительности распределение скорости по степенному закону нельзя рассматривать как универсальное.

С другой стороны, поскольку экспериментальные данные, представленные на рис. 7.4, относятся к различным значениям числа Рейнольдса, а также к гладкой и шероховатой стенкам, то относительная избыточная скорость $(U_0 - \bar{U}_1)/u^*$, очевидно, является

универсальной функцией от $\xi_2 = \frac{x_2}{\delta}$:

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = f(\xi_2). \quad (7.69)$$

Но отношение

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{U_0} = \frac{u^*}{U_0} f(\xi_2) \quad (7.70)$$

уже не представляет собой универсальной функции от ξ_2 .

Тогда для толщины вытеснения δ_d и толщины потери импульса δ_m получим [ср. уравнения (7.55) – (7.57)]

$$\frac{\delta_d}{\delta} = \frac{u^*}{U_0} \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 = I_1 \frac{u^*}{U_0} \quad (7.71)$$

и

$$\frac{\delta_m}{\delta} = \frac{u^*}{U_0} \int_0^1 f(\xi_2) \left[1 - \frac{u^*}{U_0} f(\xi_2) \right] d\xi_2 = I_1 \frac{u^*}{U_0} - I_2 \frac{u^{*2}}{U_0^2}. \quad (7.72)$$

Отсюда следует, что выражение

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{U_0} \frac{\delta}{\delta_d} = \frac{1}{I_1} f(\xi_2) \quad (7.73)$$

должно быть универсальной функцией ξ_2 , в то время как формпараметр

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} = \left(1 - \frac{u^*}{U_0} \frac{I_2}{I_1} \right)^{-1} \quad (7.74)$$

зависит еще и от условий на стенке. В связи с тем, что величины I_1 и I_2 представляют собой универсальные постоянные, их отношение I_2/I_1 также является универсальной постоянной для течений без градиента давления.

Гёталс [23] определил функцию $(1 - \bar{U}_1/U_0)(\delta/\delta_d)$ для потоков различного типа, включая течения с положительным и отрицательным градиентами давления. Отличия между функциями, соответствующими различным типам течения, лежат в пределах разброса экспериментальных точек, относящихся к каждому из этих типов течения.

Хама [20] построил кривую зависимости формпараметра H от u^*/U_0 , используя при этом данные для гладкой и шероховатой пластин. Эта кривая изображена на рис. 7.6; при построении этой кривой величина I_2/I_1 принималась равной 6,1.

Можно заметить, что если пользоваться логарифмическим распределением скорости вида (7.66), то получается $I_2/I_1 = 2A = 4,88$

[ср. с уравнением (7.57)], а если использовать логарифмическое распределение скорости вида (7.66а), то

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2A^2 + 2AB^* + B^*}{A + B^*} = 5,4.$$

Выше отмечалось, что при $x_2/\delta > 0,15$ логарифмическое распределение скорости (7.67) отклоняется от действительного. Для

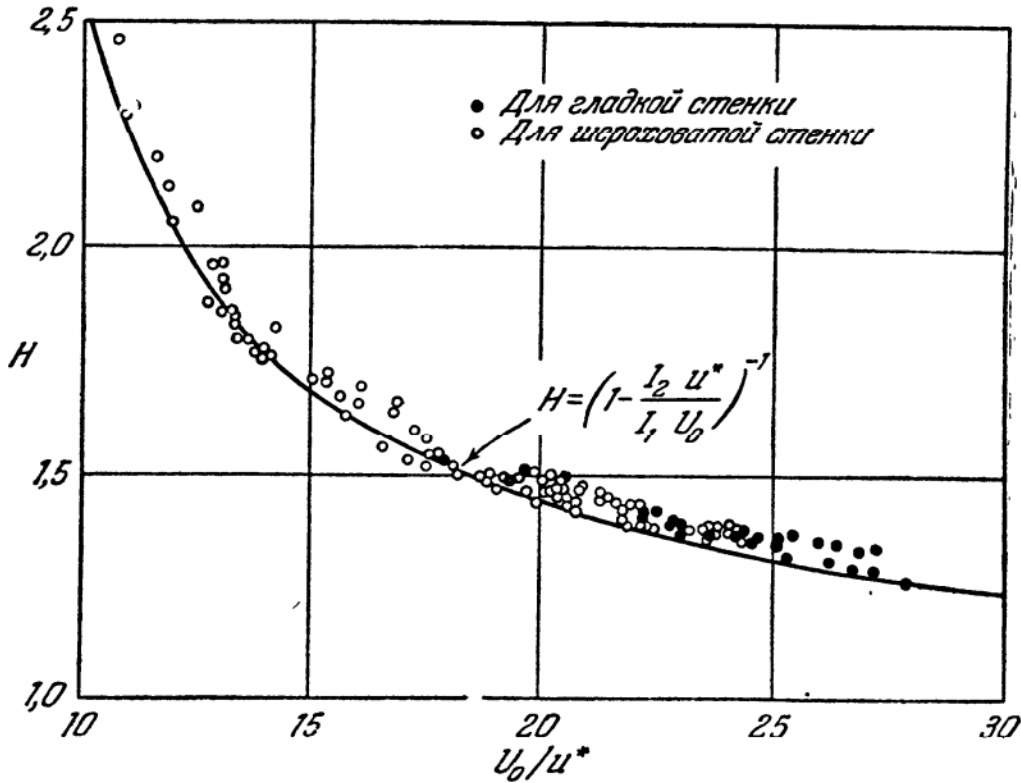


Рис. 7.6. Зависимость формпараметра H от u^*/U_0 . [Хама Ф. Р., *Advances in Applied Mechanics* 4, стр. 28, New York, 1956.]

исключения этого расхождения можно ввести поправочную функцию $h(\xi_2)$, такую, чтобы выражение

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -A \ln \xi_2 + B^* + h(\xi_2) \tag{7.75}$$

представляло собой действительное распределение скорости $f(\xi_2)$. Поправочная функция $h(\xi_2)$ изображена на рис. 7.7. Подобная поправочная функция была введена ранее Миллиkenом [7], однако с той разницей, что он применил ее к логарифмическому распределению скорости (7.32а) для гладкой стенки и к распределению (7.39) для шероховатой стенки. Таким образом, для случая гладкой стенки Милликен принял, что

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^* x_2}{y} + B + h_1(\xi_2) \tag{7.76}$$

и по экспериментальным данным Людвига и Тилмана, а также других исследователей получил функцию $h_1(\xi_2)$. Хотя использованные данные имеют значительный разброс, эта функция по форме оказалась подобной функции $h(\xi_2)$.

Выше уже было показано, что закон избыточной скорости выполняется как для гладкой, так и для шероховатой стенки. Влияние условий на стенке отражается лишь на величине u^* . Однако вблизи стенки распределение скорости непосредственно связано с видом и величиной шероховатости стенки. Помимо этого имеется еще неопределенность в оценке того значения x_2 , при котором скорость \overline{U}_1

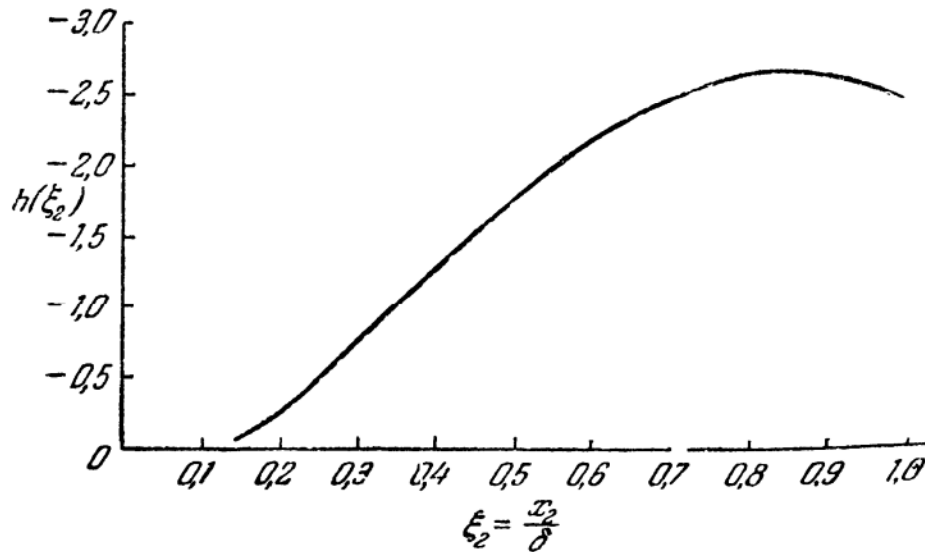


Рис. 7.7. Поправочная функция $h(\xi_2)$ для логарифмического распределения избыточной скорости.

в среднем вдоль стенки равна нулю. Хотя обычно и принято считать, что $\overline{U}_1 = 0$ при $x_2 = 0$, действительная точка, в которой $\overline{U}_1 = 0$, может находиться где-то между $x_2 = 0$ и $x_2 = k$, где k — средняя высота элементов шероховатости. Коль скоро толщина вязкого подслоя $\delta_1 \gg k$, отклонение от распределения скорости, справедливого для гладкой стенки, будет мало. Влияние элементов шероховатости, проявляющееся в уменьшении величины δ_1 с ростом шероховатости k , обусловлено тем, что эта шероховатость создает возмущения в потоке, которые вызывают расширение переходной области в направлении меньших значений x_2 .

Основываясь на опытах Никурадзе по исследованию течения в круглых трубах со стенками, имеющими равномерную песочную шероховатость, Ротта [11] нашел связь между δ_1 и k , графически изображенную на рис. 7.8. Из рассмотрения этого рисунка можно сделать вывод, что при $u^*k/\nu < 5$ влияние шероховатости на $u^*\delta_1/\nu$ мало, а при $u^*k/\nu > 55$ достигаются условия вполне шероховатой стенки, при которых эффективный вязкий подслой отсутствует. Обе

эти величины, 5 и 55, относятся к опытам Никурадзе. При шероховатости иного типа они могут иметь значения, весьма отличные от этих. Но, во всяком случае, можно ожидать, что имеется определенное наименьшее значение u^*k/ν , ниже которого стенка является как бы гидравлически гладкой и никакого отклонения от условий идеально гладкой стенки не наблюдается. Тогда выражение для распределения скорости (7.39), в котором можно положить $A_1 = A$, переходит в выражение (7.32а).

Этот факт привел Хама [20] к мысли записать уравнение (7.39) в виде

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^*x_2}{\nu} + B - \left(A \ln \frac{u^*k}{\nu} + B - B_1 \right).$$

Эта формула показывает, что влияние шероховатости стенки проявляется через вертикальное смещение распределения скорости для гладкой стенки на величину

$$\frac{\Delta \bar{U}_1}{u^*} = A \ln \frac{u^*k}{\nu} + B - B_1, \tag{7.77}$$

зависящую от типа и величины шероховатости. При больших значениях u^*k/ν первый член в правой части этого выражения приобретает определяющую роль, а величина $\Delta \bar{U}_1/u^*$ становится пропорциональной $\ln(u^*k/\nu)$ с коэффициентом пропорциональности, равным A . В этом случае достигается условие вполне шероховатой стенки.

Клаузер [21] и Хама [20] определили величину $\Delta \bar{U}_1/u^*$ для совершенно различных типов шероховатости; эти результаты представлены на рис. 7.9. Можно заметить, что упомянутые выше значения $u^*k/\nu = 5$ и 55 справедливы лишь для равномерной песочной шероховатости и что величина $\Delta \bar{U}_1/u^*$ ни в коем случае не является универсальной функцией u^*k/ν . При больших значениях u^*k/ν угловой коэффициент прямых линий равен $A = 2,44$, однако значения разности $B - B_1$, содержащейся в выражении для $\Delta \bar{U}_1/u^*$, для различных типов шероховатости могут все же заметно отличаться. В области промежуточной шероховатости, где условия не соответствуют

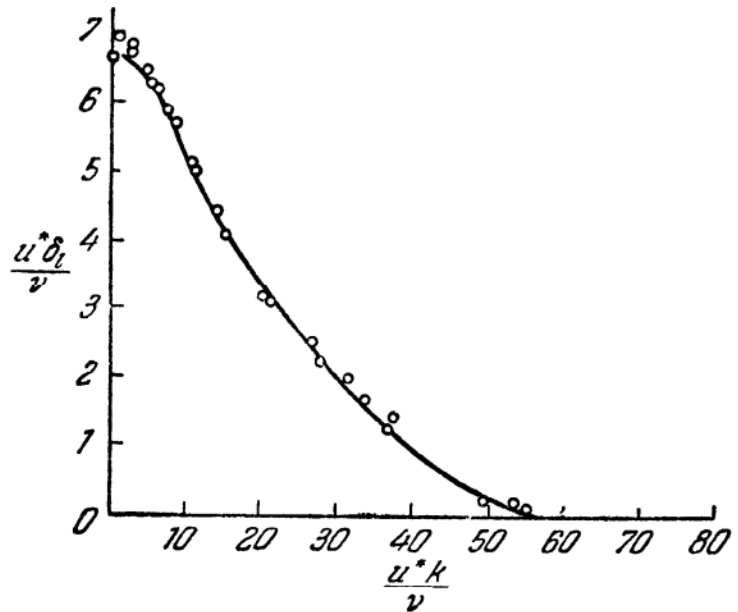


Рис. 7.8. Влияние шероховатости стенки на величину δ_l по опытам Никурадзе для случая равномерной песочной шероховатости [11].

ни гидравлически гладкой, ни вполне шероховатой стенке, ход кривых $\Delta \bar{U}_1/u^*$ в зависимости от характера шероховатости совершенно различен.

Отсюда следует, что в настоящее время попытки отыскать распределение скорости вблизи шероховатой стенки еще не вышли за рамки чистого эмпиризма и что до сих пор не имеется какого-либо

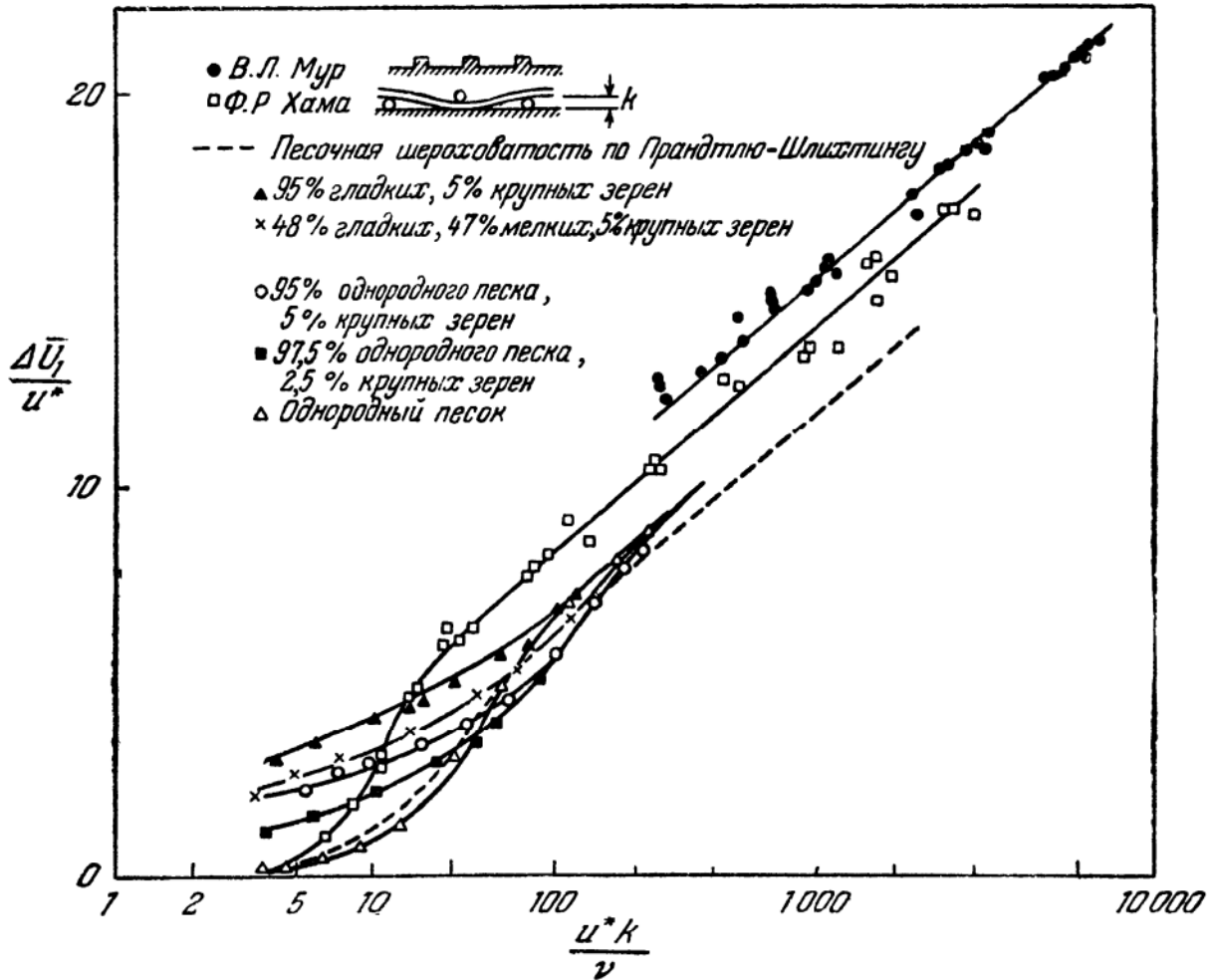


Рис. 7.9. Влияние шероховатости стенки на смещение $\Delta \bar{U}_1/u^*$ кривой распределения скорости [21].

способа расчета этого распределения для шероховатости произвольного типа; во всяком случае, описать влияние типа шероховатости с помощью единственного параметра шероховатости k не представляется возможным.

В предыдущем параграфе было показано, что закон нарастания толщины пограничного слоя с увеличением x_1 можно получить, если известно отношение u^*/U_0 или величина c_f . Людвигу и Тилману [15] удалось, основываясь на точных измерениях местного напряжения сдвига на стенке σ_w при обтекании гладкой пластины, получить сле-

дующее эмпирическое соотношение:

$$c_f = 0,246 \cdot 10^{-0,678H} \left(\frac{U_0 \delta_m}{\nu} \right)^{-0,268}, \quad (7.78)$$

справедливое в диапазоне $U_0 \delta_m / \nu$ от 10^3 до 10^4 .

В связи с тем, что формпараметр H зависит от u^*/U_0 , т. е. от c_f , это соотношение слишком сложно, чтоб его можно было использовать для расчета зависимости δ_m от x_1 в явном виде. Однако в рассматриваемом диапазоне изменения $U_0 \delta_m / \nu$ формпараметр H изменяется весьма мало и может быть аппроксимирован некоторой средней величиной. В качестве этой средней величины возьмем $H \approx 1,36$; тогда выражение для c_f примет вид

$$c_f \approx 0,03 \left(\frac{U_0 \delta_m}{\nu} \right)^{-0,268}. \quad (7.79)$$

Если для распределения скорости принимается степенной закон, то эта зависимость соответствует величине $n = 6,45$ [см. уравнение (7.61)].

При таком значении n упрощенное соотношение (7.63а) записывается как

$$\frac{U_0 \delta_m}{\nu} = 0,045 \left(\frac{U_0 x_1}{\nu} \right)^{0,79}. \quad (7.80)$$

Следует особо подчеркнуть, что это соотношение выполняется, и то лишь приблизительно, только в диапазоне изменения $U_0 \delta_m / \nu$ от 10^3 до 10^4 . Однако им можно пользоваться для оценки увеличения толщины пограничного слоя в направлении вниз по потоку. Поскольку величина n зависит от числа Рейнольдса, то и постоянная C_2 и показатель степени при $U_0 x_1 / \nu$ в уравнении (7.63а) тоже при этом изменяются. При $n = 5$ этот показатель составляет 0,75, а при $n = 7$ он становится равным 0,80; отсюда следует, что влияние числа Рейнольдса на показатель степени при $U_0 x_1 / \nu$ оказывается очень слабым.

§ 7.6. Измерение характеристик турбулентности в пограничном слое

К настоящему времени опубликовано много результатов измерений интенсивности турбулентности в пограничном слое, однако экспериментальные данные о других характеристиках турбулентности, например турбулентном напряжении сдвига, пространственных корреляциях, турбулентной диссипации и т. п., намного беднее. Систематические измерения характеристик турбулентности были проведены совсем недавно Таунсендом, Шубауэром и его сотрудниками, а также Корсином и Кистлером, причем результаты этих измерений имеют значительно меньший разброс, нежели в более ранних работах.

В опытах Таунсенда измерения проводились в пограничном слое на стенке аэродинамической трубы с поперечным сечением $38 \times 38 \text{ см}^2$; при этом пограничный слой немного утолщался и стабилизировался посредством расположенной на входе в рабочую часть вставки высотой $0,2 \text{ см}$ и длиной в направлении вниз по потоку 5 см . Поверхность стенки покрывалась гладкой пленкой бакелита. Измерения производились на достаточном расстоянии от входа, чтобы обеспечить условия равновесия в пограничном слое. Скорость свободного потока U_0 составляла 1280 см/сек , а турбулентность в свободном потоке имела относительную интенсивность $u'_1/U_0 = 0,06\%$, причем во входном сечении $u'_2/U_0 = u'_3/U_0 = 0,15\%$. Число Рейнольдса пограничного слоя, отнесенное к толщине вытеснения δ_d , изменялось от 3630 до 5080, будучи зависимым от расстояния до входного сечения.

Шубауэр и его сотрудники [16, 17, 27] провели большинство своих опытов по измерениям в пограничном слое на гладкой плоской алюминиевой пластине толщиной $0,6 \text{ см}$ при симметричной и заостренной передней кромке, установленной в восьмиугольной рабочей части, расстояние между стенками которой составляло 136 см . Здесь пограничный слой тоже искусственно утолщался при помощи покрытия первых 60 см этой пластины наждачной бумагой. Интенсивность турбулентности свободного потока составляла примерно $0,03\%$. Наибольшая часть измерений осуществлялась в сечении, где пограничный слой имел толщину $7,5 \text{ см}$, при скорости свободного потока 1500 см/сек . Можно считать, что в этом сечении в пограничном слое достигались условия равновесия.

Подобно Таунсенду, Корсин и Кистлер [29] использовали в своих опытах одну из стенок аэродинамической трубы с рабочей частью $60 \times 60 \text{ см}^2$, которой по всей длине была придана шероховатость при помощи гофрированной бумаги. Гофры, расположенные перпендикулярно к направлению потока, имели форму, близкую к синусоиде с длиной волны около $0,8 \text{ см}$ и амплитудой $0,2 \text{ см}$. Скорость свободного потока составляла 1120 см/сек , а относительная интенсивность его турбулентности была около $0,06\%$. Течение в пограничном слое соответствовало условию «вполне шероховатой» стенки. В конце рабочей части толщина пограничного слоя составляла примерно 9 см .

На рис. 7.10 представлены три компоненты интенсивности турбулентности, отнесенной к скорости свободного потока, которые были получены в опытах Клебанова [27] с пограничным слоем на гладкой стенке. Можно заметить, что интенсивности этих трех компонент турбулентной пульсации скорости почти по всей внутренней части пограничного слоя значительно отличаются друг от друга. По направлению к стенке степень анизотропности возрастает. Интен-

сивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости имеет наибольшую величину, а интенсивность поперечной компоненты, перпендикулярной к стенке, — наименьшую. Осевая компонента достигает своего максимального значения в области, очень близкой к стенке, а именно в слое постоянного напряжения. Это следует из анализа рис. 7.11, на котором изображены результаты измерений Клебанова в этом слое.

На этом рисунке показана также интенсивность осевой компоненты турбулентной пульсации скорости, отнесенная к местной осредненной скорости. Эта относительная интенсивность достигает

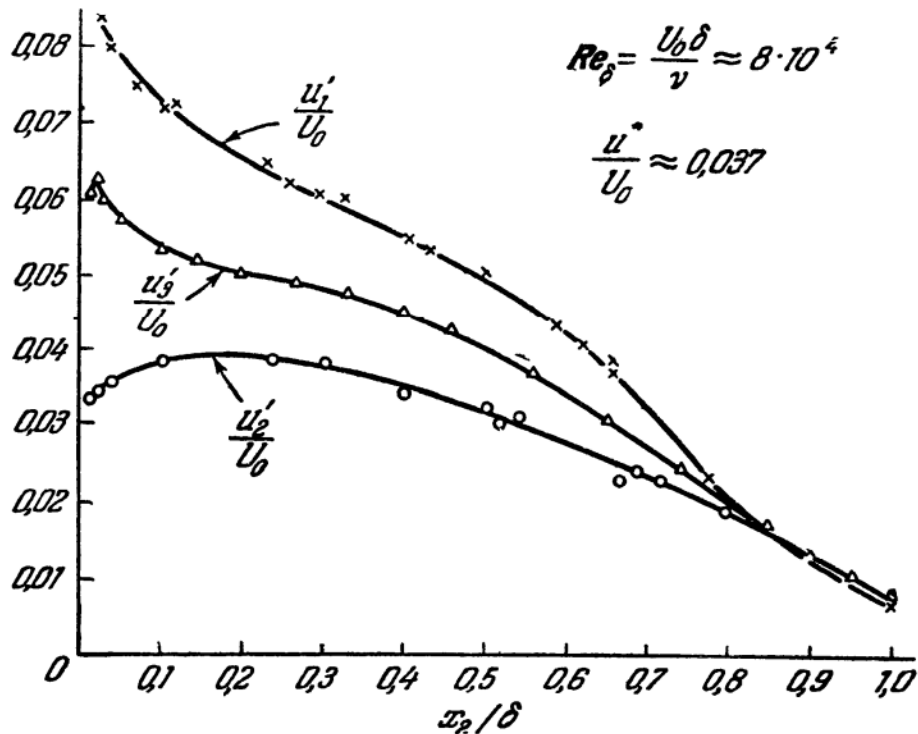


Рис. 7.10. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [27].

в вязком подслое некоторой постоянной величины. Отсюда можно сделать вывод, что течение в этом слое, будучи вязким, по своему характеру все еще является турбулентно-пульсационным и что скорости изменяются пропорционально расстоянию от стенки.

Подобное распределение компонент интенсивности турбулентности в пограничном слое было получено Корсином и Кистлером [29] в случае шероховатой стенки. Однако эти измерения производились снаружи пристеночной области, т. е. вне слоя постоянного напряжения. Сравнение результатов этих измерений, которые изображены на рис. 7.12, с данными рис. 7.10 показывает, что компоненты относительной интенсивности турбулентности, измеренные Корсином и Кистлером, значительно больше тех, которые были получены в опытах Клебанова. Однако отношение относительных интенсивностей

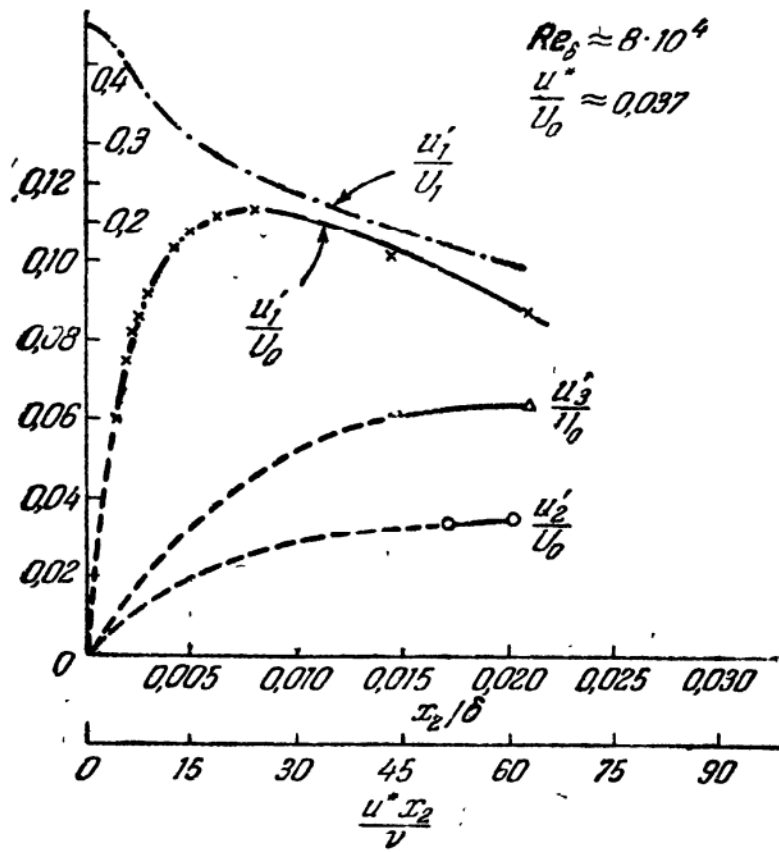


Рис. 7.11. Относительная интенсивность турбулентности в слое постоянного напряжения в пограничном слое на гладкой стенке [27].

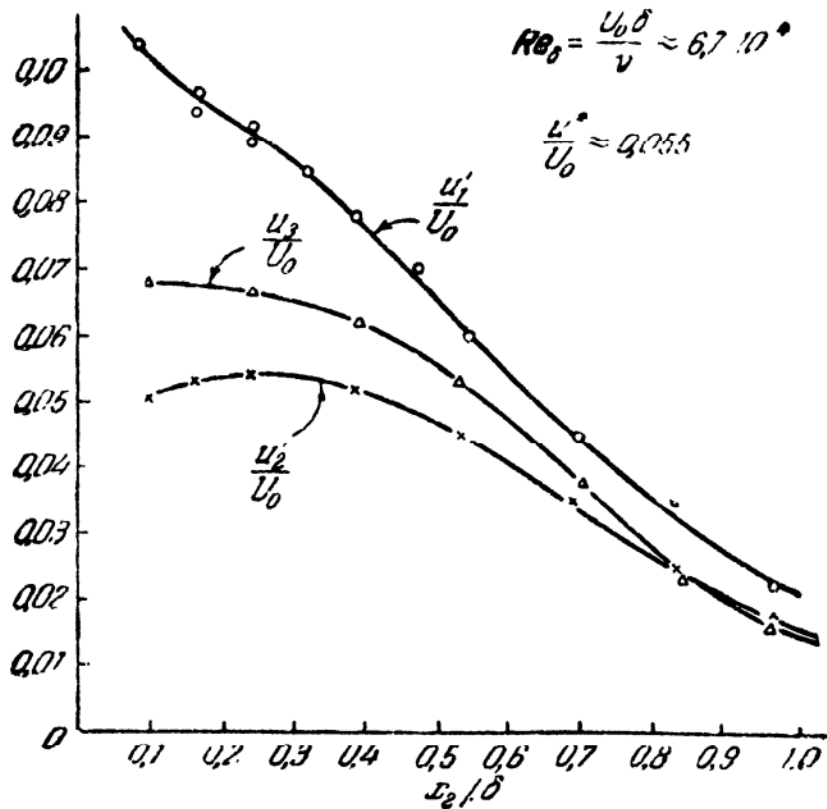


Рис. 7.12. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на шероховатой стенке при отсутствии градиента давления [29].

турбулентности для пограничного слоя на шероховатой и гладкой стенке примерно равно отношению соответствующих напряжений сдвига на стенке. Следовательно, если интенсивность турбулентности отнести к соответствующему напряжению сдвига на стенке, то для пограничного слоя как на гладкой, так и на шероховатой стенке получаются практически одинаковые результаты.

По данным Клебанава о компонентах относительной интенсивности турбулентности было вычислено распределение кинетической энергии турбулентности $\overline{q^2}/U_0^2$ в пограничном слое. Результаты этих расчетов

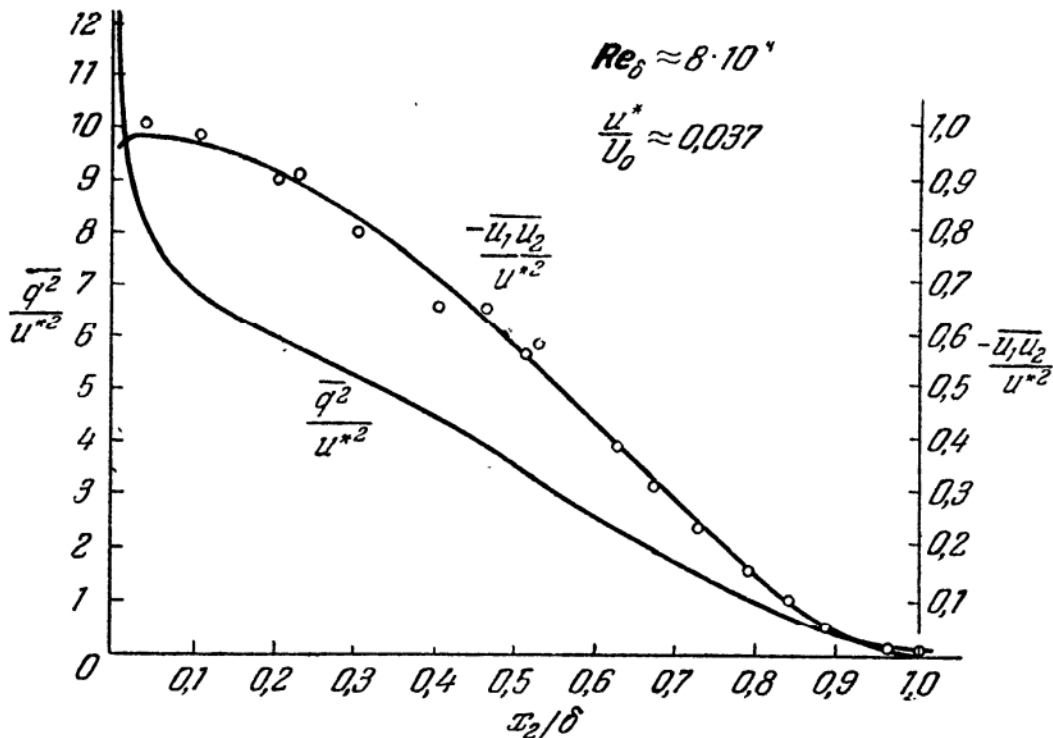


Рис. 7.13. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига в поперечном сечении пограничного слоя [27].

показаны на рис. 7.13 вместе с распределением турбулентного напряжения сдвига, непосредственно измеренного Клебанавым [27]. Можно заметить, что в пристеночной области $x_2/\delta < 0,1$ напряжение сдвига практически постоянно (см. также рис. 7.14, на котором изображено распределение $-\overline{u_1 u_2}/u^{*2}$ в этой области). Значит, предположение о постоянстве напряжения сдвига в этой области, очевидно, оправдано.

Если рассматривать только область, не слишком близкую к стенке, то можно наблюдать подобие между распределением турбулентного напряжения сдвига и распределением кинетической энергии турбулентности. Полное подобие между этими распределениями, т. е. постоянство отношения этих величин, должно было бы наблюдаться

в том случае, когда была бы справедлива гипотеза подобия Кармана относительно структуры турбулентности. Распределение отношения $-\overline{u_1 u_2} / q^2$ дано на рис. 7.15; в большей части пограничного слоя оно почти постоянно.

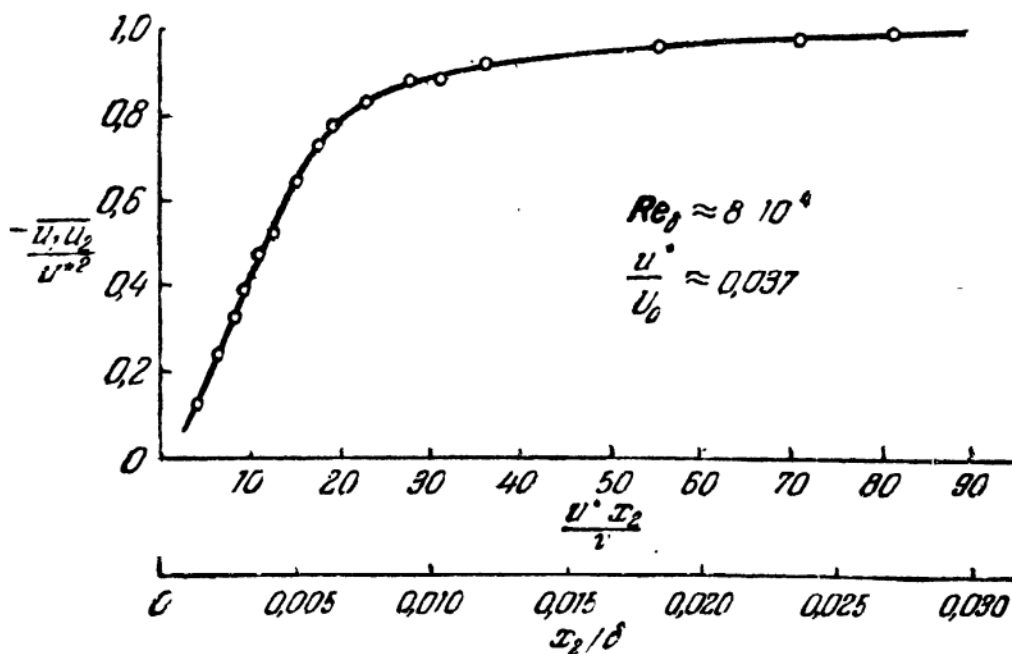


Рис. 7.14. Распределение турбулентного напряжения сдвига в пристеночной области пограничного слоя [30].

Некоторые из предположений Прандтля тоже приводят к результатам, согласующимся с изложенными выше. Если ввести коэффициент корреляции $R_{1,2} = \frac{\overline{u_1 u_2}}{u_1' u_2'}$, то отношение $\frac{\overline{u_1 u_2}}{q^2}$ можно записать

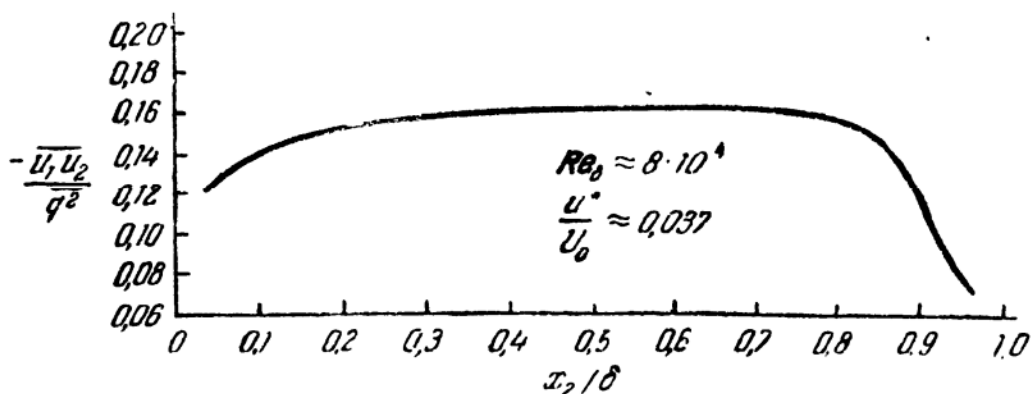


Рис. 7.15. Распределение отношения турбулентного напряжения сдвига к кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении пограничного слоя.

так: $R_{1,2} u_1' u_2' / q^2$. Поскольку Прандтль принимал $R_{1,2} = \text{const}$, а $u_1' \sim u_2' \sim q' \sim \int_m \partial \overline{U}_1 / \partial x_2$, то отношение $\overline{u_1 u_2} / q^2$ должно быть постоянно. Однако обратный вывод о том, что из постоянства этого

отношения должна следовать справедливость предположения Прандтля, является неверным. Например, кривые распределения компонент относительной интенсивности турбулентности, приведенные на рис. 7.10 и рис. 7.12, показывают, что отношение u'_1/u'_2 , в противоположность предположению Прандтля, не сохраняет в пограничном слое постоянного значения.

Распределение коэффициента вихревой вязкости ϵ_m может быть получено из распределений турбулентного напряжения сдвига и осредненной скорости из отношения

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{U_0^2} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 \delta} \frac{\partial \bar{U}_1 / U_0}{\partial \xi_2}$$

или

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{u^* \delta} \frac{\partial \bar{U}_1 / u^*}{\partial \xi_2} \quad (7.81)$$

На рис. 7.16 приводится распределение величины $(\epsilon_m)_{11}/u^* \delta$, вычисленное по данным Шубауэра [30] для слоя постоянного напряжения. Как видим, ход этого распределения вблизи стенки указывает

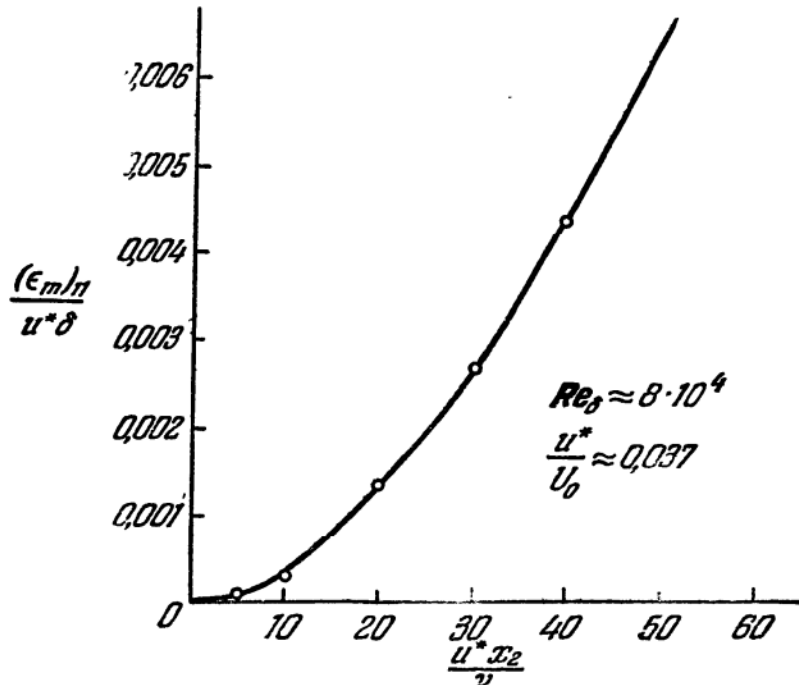


Рис. 7.16. Распределение коэффициента вихревой вязкости в пристеночной области пограничного слоя, вычисленное по данным Шубауэра [30].

на то, что в этой области величина $(\epsilon_m)_{11}/u^* \delta$ изменяется пропорционально $(x_2^+)^n$, где $n \approx 2$, хотя следует отметить, что это значение n не очень надежно, так как оно получено на основании слишком ограниченного количества данных.

С увеличением расстояния от стенки, по мере приближения к полностью турбулентной области, распределение коэффициента вихревой вязкости должно стремиться к линейной зависимости от расстояния до стенки. Вид кривой, изображающей зависимость $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ от этого расстояния, которая показана на рис. 7.17 и

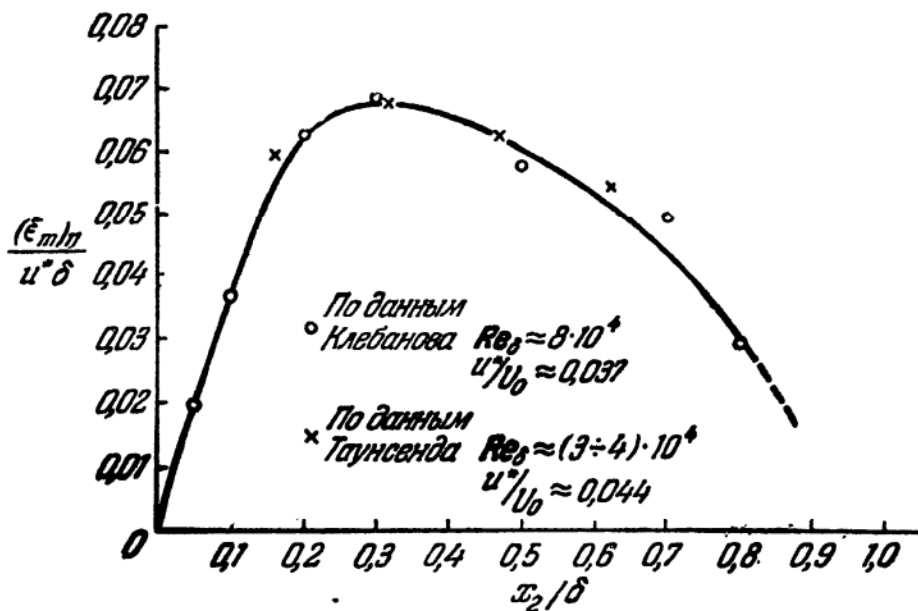


Рис. 7.17. Распределение коэффициента вихревой вязкости в поперечном сечении пограничного слоя, вычисленное по данным Клебана [27] и Таунсенда [28].

получена по опытным данным Клебана [27], по-видимому, свидетельствует в пользу подобной линейной зависимости в пристеночной области. Как можно заметить, коэффициент вихревой вязкости достигает своего максимального значения примерно при $x_2/\delta = 0,3$. На том же рисунке представлены также значения $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$, вычисленные по данным Таунсенда [28]; соответствие их со значениями, полученными по данным Клебана, можно считать удовлетворительным.

В § 7.1 упоминалось о сходстве между условиями течения во внешней части пограничного слоя и в свободном турбулентном потоке; кроме того, отмеченное подобие проявляется также и во взаимодействии между турбулентным течением и свободным потоком вблизи внешней границы пограничного слоя. Такого рода взаимодействие находит свое выражение, например, в перемежающемся характере течения. Коэффициенты перемежаемости были определены Клебановым [27], а также Корсином и Кистлером [29].

Клебанов находил коэффициенты перемежаемости по измеренным коэффициентам сплющивания (см. главу 6). Корсин и Кистлер пользовались для этой цели иным методом, который состоял в измерении среднеквадратичной величины прерывистого импульса, упра-

вляемого перемежающимся сигналом от термоанемометра, подаваемым на вход.

Распределение коэффициента перемежаемости Ω в рассматриваемом случае не отличается от того, которое было получено для свободных турбулентных потоков. Это распределение очень хорошо описывается гауссовой функцией ошибок

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha \xi_2 + \beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz, \quad (7.82)$$

где $\alpha \xi_2 + \beta = (x_2 - \bar{x}_2^*) / (x_2^* - \bar{x}_2^*)'$, \bar{x}_2^* — среднее положение поверхности раздела между областями турбулентного и нетурбулентного движений жидкости, а $(x_2^* - \bar{x}_2^*)'$ — корень квадратный из среднеквадратичной величины разности между мгновенным и средним положениями этой поверхности. Кривые, изображенные на рис. 7.18,

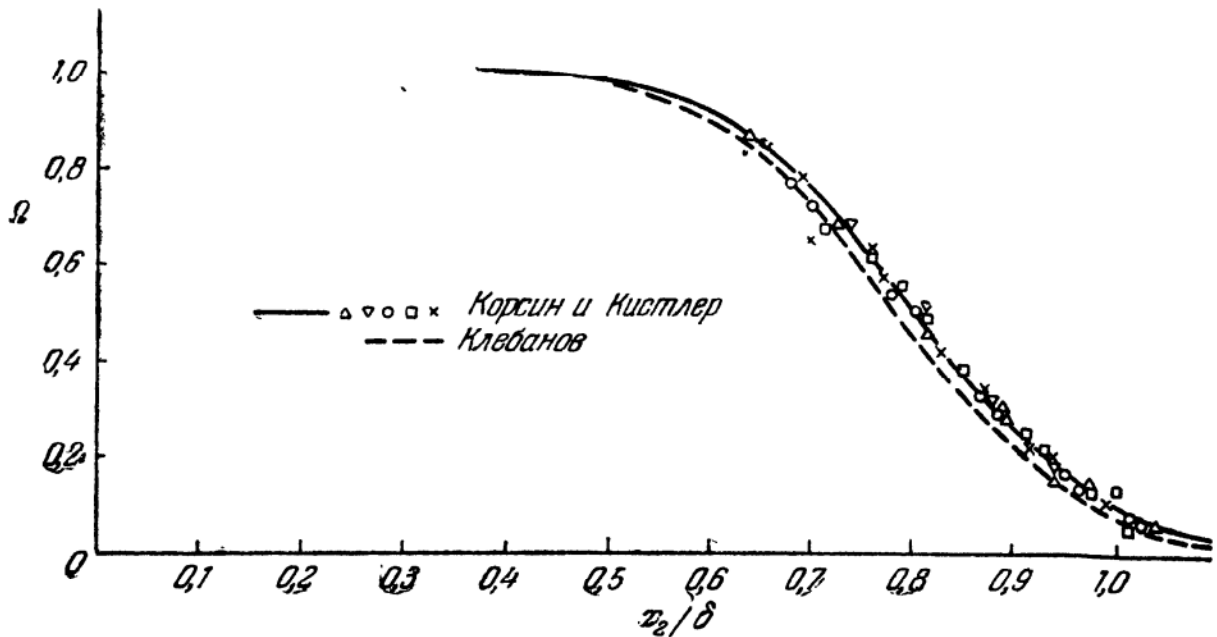


Рис. 7.18. Распределение коэффициента перемежаемости в поперечном сечении пограничного слоя по опытам Клебанова [27] и Корсина и Кистлера [29].

представляют собой гауссовы функции ошибок подобного типа применительно к данным соответственно Корсина и Кистлера и Клебанова. Между этими двумя кривыми имеется небольшое смещение. Корсином и Кистлером было получено при этом значение $\bar{x}_2^*/\delta = 0,8$, а Клебановым — 0,78. Различие между этими значениями довольно невелико и может быть объяснено некоторым произволом в определении величины толщины пограничного слоя δ . Корсин и Кистлер, как и Клебанов, нашли, что величина стандартного отклонения составляет примерно $(x_2^* - \bar{x}_2^*)' = 0,14\delta$. Поскольку в

опытах Корсина и Кистлера измерения проводились в различных сечениях пограничного слоя, то разные точки на рис. 7.18 относятся именно к этим различным сечениям, а полученные экспериментальные величины $\bar{x}_2^*/\delta = 0,8$ и $(x_2^* - \bar{x}_2^*)'/\delta = 0,14$ представляют собой средние значения.

Аналогично тому, как это делалось в случае свободных турбулентных потоков, в распределения различных характеристик турбулентности можно внести поправку, учитывающую влияние перемежаемости, с тем чтобы получить представление о распределении этих

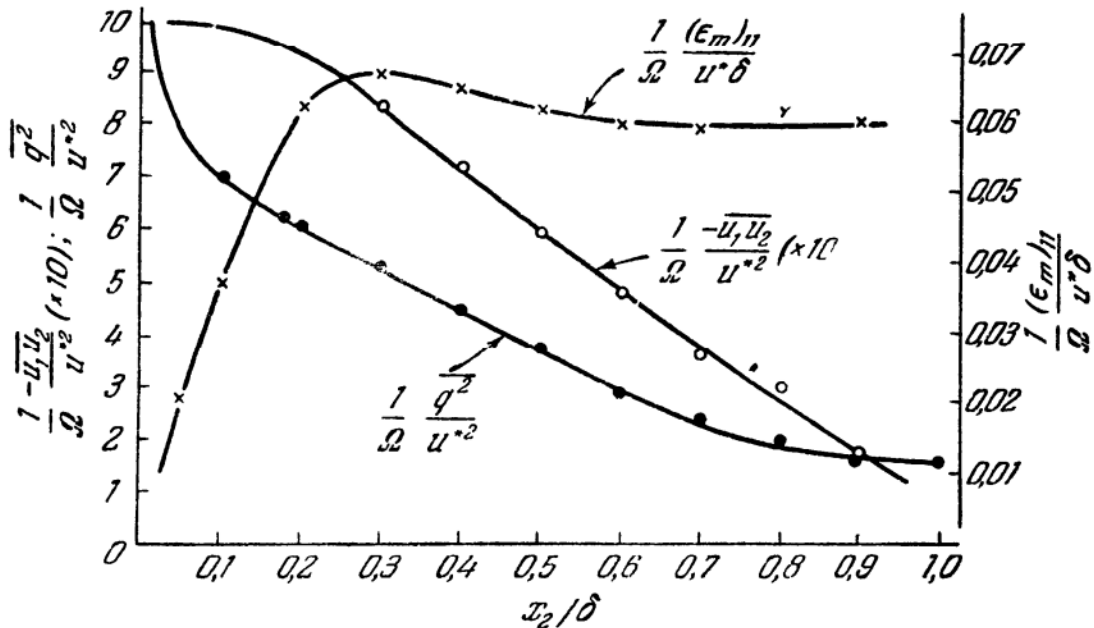


Рис. 7.19. Распределение кинетической энергии турбулентности, турбулентного напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости в пограничном слое после внесения поправки на перемежаемость.

характеристик в тех областях, где движение жидкости является полностью турбулентным. На рис. 7.19 изображены распределения величин кинетической энергии, турбулентного напряжения сдвига и коэффициента вихревой вязкости, каждая из которых умножена на Ω^{-1} . При этом получается поразительный результат: величина $-\overline{u_1 u_2} / \Omega u^{*2}$ изменяется в зависимости от x_2/δ почти по линейному закону, а величина $(\epsilon_m)_{11} / \Omega u^{*2} \delta$ почти постоянна на значительном протяжении внешней части пограничного слоя (область, где справедлив закон избыточной скорости). Последний результат полностью аналогичен тому, который был получен для течения в следе за цилиндром (см. рис. 6.13), что, по-видимому, снова указывает на подобие между картинами турбулентного течения в следе и во внешней части пограничного слоя. В то же время в отношении диссипации турбулентности такого вывода сделать нельзя. Тогда как в случае следа это распределение после внесения поправки на перемежаемость

является почти равномерным (см. рис. 6.13), для течения в пограничном слое это отнюдь не так. На рис. 7.20 показано распределение диссипации энергии турбулентности по измерениям Клебана [27]. В этом случае наблюдается постепенное уменьшение диссипации в направлении к внешней границе пограничного слоя даже после внесения поправки на перемежаемость.

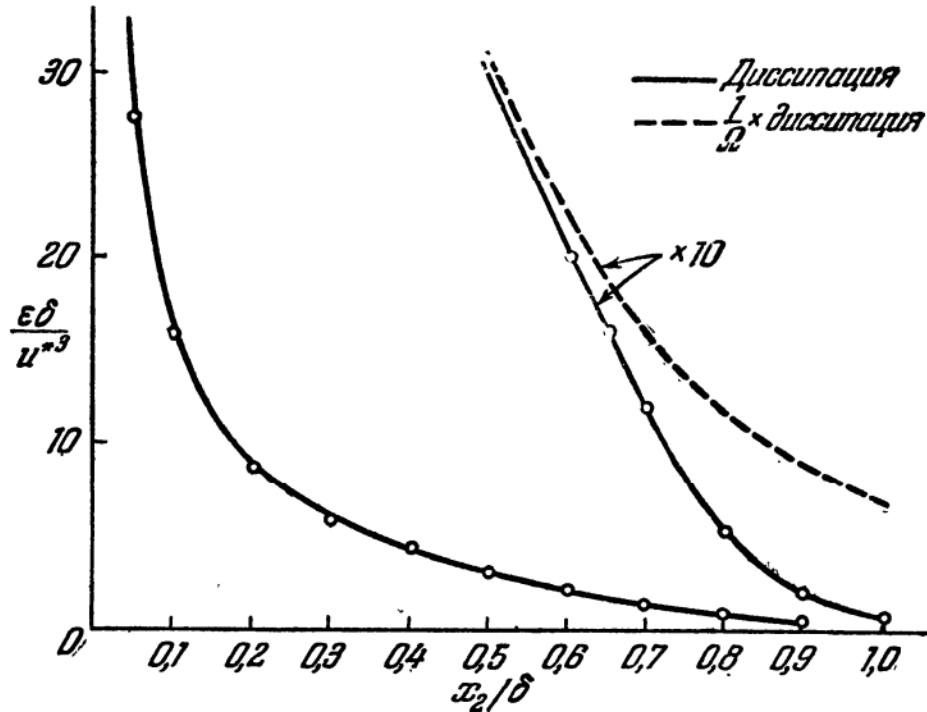


Рис. 7.20. Распределение турбулентной диссипации в поперечном сечении пограничного слоя [27].

Для определения диссипации энергии турбулентности необходимо измерить величину всех членов диссипативной функции, которая, будучи записана в безразмерной форме, имеет вид

$$\frac{\epsilon \delta}{u^{*3}} = \frac{\nu}{u^* \delta} \left(\frac{\partial u_j / u^*}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_i / u^*}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial u_j / u^*}{\partial \xi_i}.$$

Поскольку, однако, не все члены в правой части этого выражения поддаются непосредственному измерению, Клебанов вместо этого выражения проанализировал полный вязкий член в уравнении энергии турбулентности, записанный в форме (7.5б), т. е.

$$\frac{\nu}{u^* \delta} \left(\frac{\partial^2 \overline{q^2}}{\partial \xi_2^2} \frac{1}{2u^{*2}} - \frac{\partial u_j / u^*}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_j / u^*}{\partial \xi_i} \right),$$

включив, таким образом, в рассмотрение работу, совершаемую вязкими напряжениями сдвига. В том случае, когда отклонение от однородности не слишком велико, что можно считать справедливым для пограничного слоя, за исключением слоя постоянного напряжения

и области, прилегающей к нему, записанный выше полный вязкий член приблизительно равен диссипации при однородной турбулентности.

Из всех девяти компонент типа $\overline{(\partial u_j / \partial x_i)(\partial u_j / \partial x_i)}$ Клебанов измерил лишь $\overline{(\partial u_1 / \partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_2 / \partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_3 / \partial x_1)^2}$, $\overline{(\partial u_1 / \partial x_2)^2}$ и $\overline{(\partial u_1 / \partial x_3)^2}$, а в отношении остальных компонент принял соотношения изотропности

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}, & \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2} &= \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}, \\ \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2}, & \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2} &= \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, хотя Клебанов и не провел совершенно точного измерения диссипации энергии турбулентности, ему все же удалось добиться заметного успеха по сравнению с методом, ранее применявшимся для исследования турбулентности, при использовании которого предполагалось, что степень локальной изотропности является достаточно высокой, чтобы диссипацию энергии турбулентности можно было полагать равной $15\nu \overline{(\partial u_1 / \partial x_1)^2}$. Это предположение могло быть принято в случае свободных турбулентных потоков, но в случае пристеночной турбулентности оно привело бы к неприемлемым ошибкам. Клебанов показал, что соотношение изотропности $\overline{(\partial u_1 / \partial x_1)^2} = \frac{1}{2} \overline{(\partial u_2 / \partial x_1)^2} = \dots$ лишь приблизительно выполняется во внешней области пограничного слоя $x_2/\delta > 0,7$ и что отклонение от этого соотношения с приближением к стенке становится все более и более сильным.

По измеренным распределениям кинетической энергии турбулентности, турбулентного напряжения сдвига и диссипации можно получить баланс энергии турбулентности, пользуясь для этого уравнением (7.5) или (7.7), в которых неизвестной величиной остается турбулентная диффузия. Составление такого баланса было осуществлено Клебановым. Поскольку Таунсенд [28] в аналогичных опытах производил также и отдельное измерение распределения величины $\overline{u_2 q^2}$, он имел возможность составить более точный баланс, в котором неизвестной величиной является только диффузия энергии давления $\overline{u_2 p / \rho}$. Баланс энергии, составленный Таунсендом [31], изображен на рис. 7.21. Баланс энергии, полученный по измерениям Клебанова, хотя и имеет некоторые количественные отличия, характеризуется такими же общими свойствами различных слагаемых уравнения баланса энергии.

Положительная величина какого-либо слагаемого в балансе энергии означает отрицательный вклад в кинетическую энергию турбу-

лентности некоторого элементарного объема, иначе говоря, потерю энергии. Рассмотрим, например, диффузионный член

$$\frac{1}{u^{*3}} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)}.$$

Если этот член является положительным, то из данного элементарного объема турбулентной пульсацией скорости u_2 отводится энергии турбулентности больше, нежели вносится в этот объем, в результате

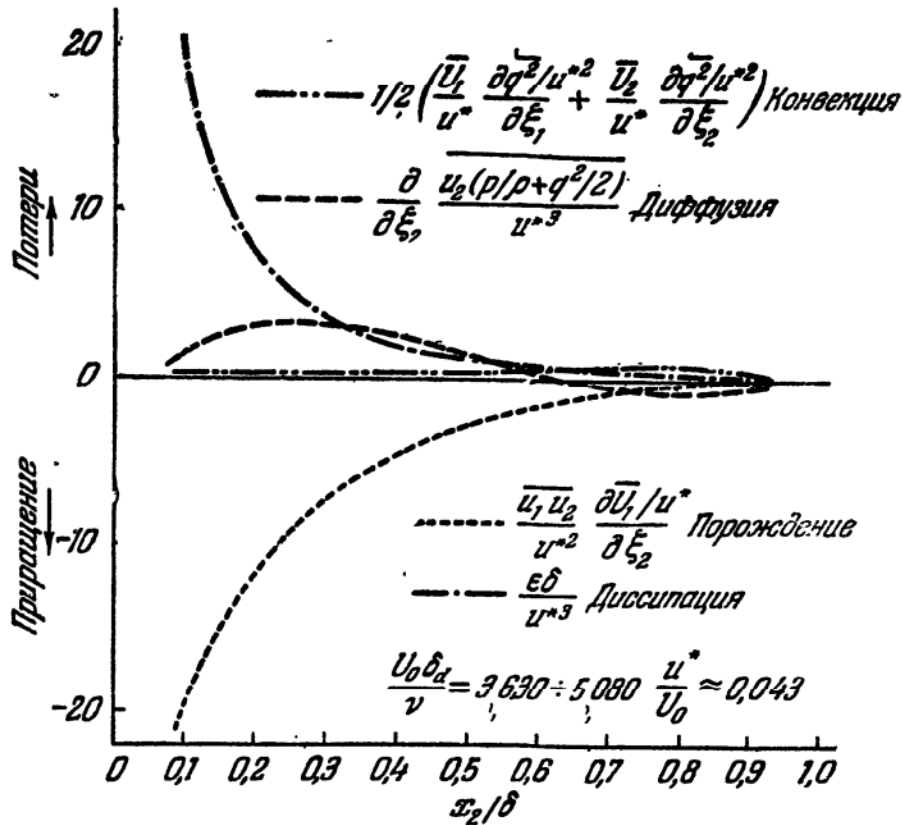


Рис. 7.21. Баланс энергии в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [31].

чего внутри этого элементарного объема происходит потеря энергии турбулентности.

Если провести сравнение этого баланса энергии с соответствующим балансом энергии для течения в следе за цилиндром (см. рис. 6.9), то наряду со сходством можно заметить и поразительное различие. Основной вклад в баланс энергии, если исключить из рассмотрения область вблизи внешней границы пограничного слоя, приходится на долю членов, характеризующих порождение и диссипацию энергии. Порождение и диссипация почти уравниваются друг друга, и при этом тем больше, чем ближе стенка. Вкладом конвекции под действием осредненного движения практически можно пренебречь, за исключением области вблизи внешней границы пограничного слоя. Соответствующий член уравнения является существенно положительным,

что означает потерю энергии. Вблизи внешней границы пограничного слоя диссипация энергии превышает ее порождение. Эта разница в сумме с потерей энергии из-за диффузии под действием осредненного движения уравнивается приращением за счет турбулентной диффузии. При углублении в пограничный слой турбулентная диффузия изменяет знак, достигает максимума (потери энергии) как раз снаружи слоя постоянного напряжения и в этом слое, по-видимому, вновь изменяет свой знак, давая при этом приращение энергии турбулентности. Очевидно, благодаря турбулентной диффузии происходит перенос энергии от внутренней части пограничного слоя к его внешней части. В пристеночной области, внутри слоя постоянного напряжения и вблизи вязкого подслоя, диссипация, по-видимому, преобладает над порождением энергии, а турбулентная диффузия, очевидно, дает приращение энергии. Так как вблизи вязкого подслоя кинетическая энергия турбулентности имеет отрицательный градиент (см. рис. 7.13), то, по всей видимости, в направлении, противоположном этому градиенту, имеется перенос энергии. Это можно было бы объяснить воздействием диффузии энергии давления. Однако недостаток непосредственных данных об изменении различных слагаемых уравнения энергии в слое постоянного напряжения заставляет относиться к сделанному выше заключению с некоторой осторожностью.

Таунсенд [31] также определил баланс энергии для осредненного движения в том виде, как он дается уравнением (7.4). Пренебрегая в этом уравнении вязким членом и записывая его в безразмерной форме, имеем

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\bar{U}_1^3}{u^{*3}} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\bar{U}_2 \bar{U}_1^2}{u^{*3}} \right] + \frac{\bar{U}_1}{u^*} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = 0.$$

Последнее слагаемое можно записать следующим образом:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\overline{u_1 u_2} \bar{U}_1}{u^{*3}} - \frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} \frac{\partial \bar{U}_1 / u^*}{\partial \xi_2}.$$

Первый член в правой части этого выражения означает работу, совершаемую турбулентным напряжением сдвига. Второй член можно интерпретировать либо как работу деформации, совершаемую турбулентным напряжением сдвига, либо как «диссипацию» кинетической энергии осредненного движения, ибо можно записать

$$-\overline{u_1 u_2} = (\epsilon_m)_{11} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}.$$

Таким образом, уравнение баланса энергии для осредненного движения принимает вид

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\bar{U}_1^3}{u^{*3}} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\bar{U}_2 \bar{U}_1^2}{u^{*3}} \right] - \frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} \frac{\partial \bar{U}_1 / u^*}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\overline{u_1 u_2} \bar{U}_1}{u^{*3}} = 0. \quad (7.83)$$

Распределение входящих в это уравнение величин в поперечном сечении пограничного слоя изображено на рис. 7.22. Потери кинетической энергии осредненного движения благодаря «диссипации» в турбулентность, а значит и в порождение энергии турбулентности, сильно возрастают по направлению к стенке. Во внешней области

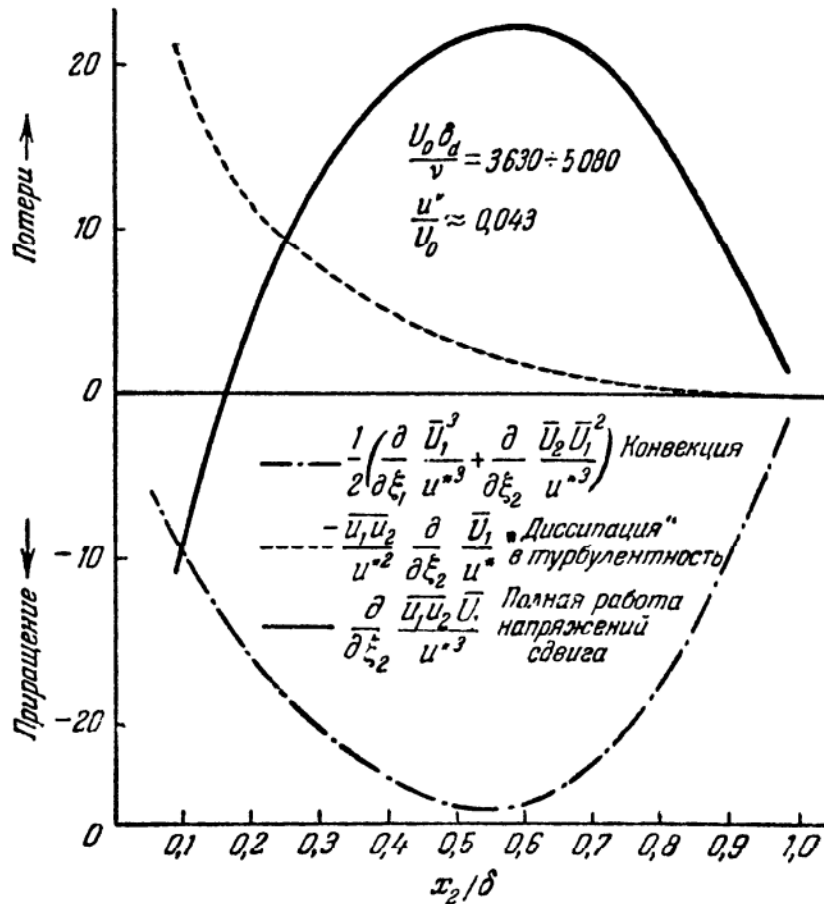


Рис. 7.22. Баланс энергии осредненного движения в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [31].

приращение энергии, обусловленное конвекцией под действием осредненного движения, практически равно потерям при работе турбулентных напряжений сдвига. В пристеночной области порождение энергии турбулентности превосходит подвод энергии непосредственно за счет конвекции при осредненном движении. Эта разница получается благодаря полной работе, совершаемой турбулентными напряжениями сдвига. По-видимому, в направлении к стенке имеется поток энергии, который «преобразуется» там в энергию турбулентного движения.

Если объединить результаты, полученные из балансов энергии для осредненного и турбулентного движений, то можно прийти к интересному и весьма важному выводу о том, что между течением во внутренней части пограничного слоя, или в пристеночной области, и течением во внешней его части должно существовать

сильное взаимодействие. Эти две части пограничного слоя характеризуются различными механизмами турбулентного течения, и между ними идет интенсивный обмен энергией.

Во внешней области наблюдается приток кинетической энергии осредненного течения от расположенных выше по потоку частей пограничного слоя. Эта энергия через работу, совершаемую турбулентными напряжениями сдвига, преобразуется во внутренней части пограничного слоя и порождает энергию турбулентности. Иначе говоря, осредненный поток замедляется под воздействием турбулентных напряжений сдвига, теряя за счет этого некоторую долю своей кинетической энергии.

Во внутренней части пограничного слоя наибольшая доля порожденной энергии турбулентности под действием турбулентной диссипации преобразуется непосредственно в тепло. Однако часть этой энергии турбулентности переносится посредством турбулентной диффузии по направлению к внешней области пограничного слоя, где происходит ее диссипация. Таким образом, по направлению к стенке имеется приток энергии, берущий свое начало в осредненном потоке, который преобразуется в энергию турбулентности, а она, в свою очередь, частично подвергается непосредственной диссипации и частично диффундирует благодаря турбулентности обратно во внешнюю область.

Из-за того, что никаких измерений в расположенной наиболее близко к стенке части пограничного слоя, т. е. в слое постоянного напряжения, до сих пор не производилось, едва ли можно сказать что-нибудь еще о процессах, происходящих там в действительности. Правда, такие измерения осуществлялись в случае течения в круглых трубах и каналах; они будут рассмотрены ниже, в § 7.9.

Некоторые дополнительные сведения можно получить из результатов измерения энергетического спектра и пространственных корреляций скорости в пограничном слое. Измерения спектра осевой и поперечной компонент турбулентных пульсаций $\overline{u_1^2}$ и $\overline{u_2^2}$, а также турбулентного напряжения сдвига — $\overline{\rho u_1 u_2}$ были проведены Клебановым [27]. На рис. 7.23, аналогичном рис. 4.5, представлены результаты измерений Клебанова для осевой компоненты турбулентных пульсаций, полученные при относительных расстояниях от стенки x_2/δ , равных 0,0011, 0,05 и 0,80. Рассматривая эти результаты, можно заметить, что спектр, снятый в точке $x_2/\delta = 0,80$, т. е. во внешней части пограничного слоя, в диапазоне волновых чисел k_1 от 0,5 до 5 см^{-1} ближе соответствует закону « $-5/3$ ». Спектр, снятый в точке $x_2/\delta = 0,05$, характеризуется тем, что в некотором диапазоне функция $E_1(k_1)$ изменяется приблизительно по закону « k_1^{-1} », указывая, таким образом, на сильное взаимодействие между осредненным и турбулентным течениями. В этой точке наблюдается интенсивное

порождение энергии турбулентности (см. рис. 7.21). Спектры, приведённые на рис. 7.23, показывают также, что вклад в энергию турбулентности в диапазоне малых волновых чисел, принадлежащий, стало быть, крупным вихрям, уменьшается по мере приближения к стенке, а вклад в эту энергию в диапазоне больших волновых чисел при этом, наоборот, возрастает.

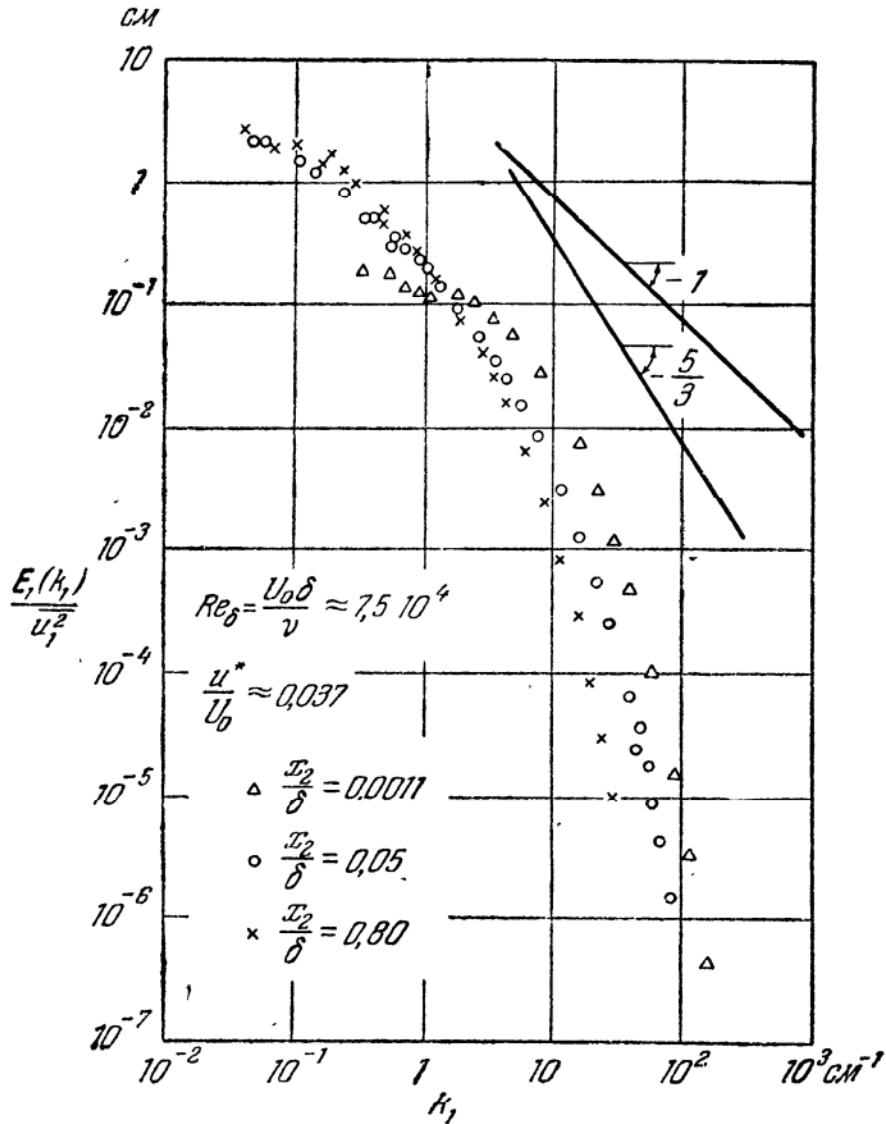


Рис. 7.23. Спектры величины $\overline{u_1^2}$ в пограничном слое на гладкой плоской пластине при отсутствии градиента давления [27].

Аналогичный вывод о диапазоне больших волновых чисел можно сделать и на основании рис. 7.24, где изображены спектры турбулентного напряжения сдвига — $\overline{\rho u_1 u_2}$ в точках $x_2/\delta = 0,05$ и $x_2/\delta = 0,80$. Сравнение с рис. 7.23 показывает, что спектр $E_{1,2}(k_1)$ в диапазоне больших волновых чисел затухает с увеличением волнового числа быстрее, чем спектр $E_1(k_1)$. Это означает, что выше определенного волнового числа вклад в напряжение сдвига становится пренебрежимо

малым. Однако при этом все еще наблюдается вклад в энергетический спектр $\overline{u_1^2}$. Этот факт указывает на наличие некоторой локальной изотропности в диапазоне наиболее высоких волновых чисел.

Спектр поперечной компоненты турбулентных пульсаций $\overline{u_2^2}$ ведет себя по сравнению со спектром $\overline{u_1^2}$ иначе, нежели это должно было бы быть, если бы турбулентность была изотропной. Это отличие заметно в диапазоне малых волновых чисел, особенно в точке $x_2/\delta = 0,05$,

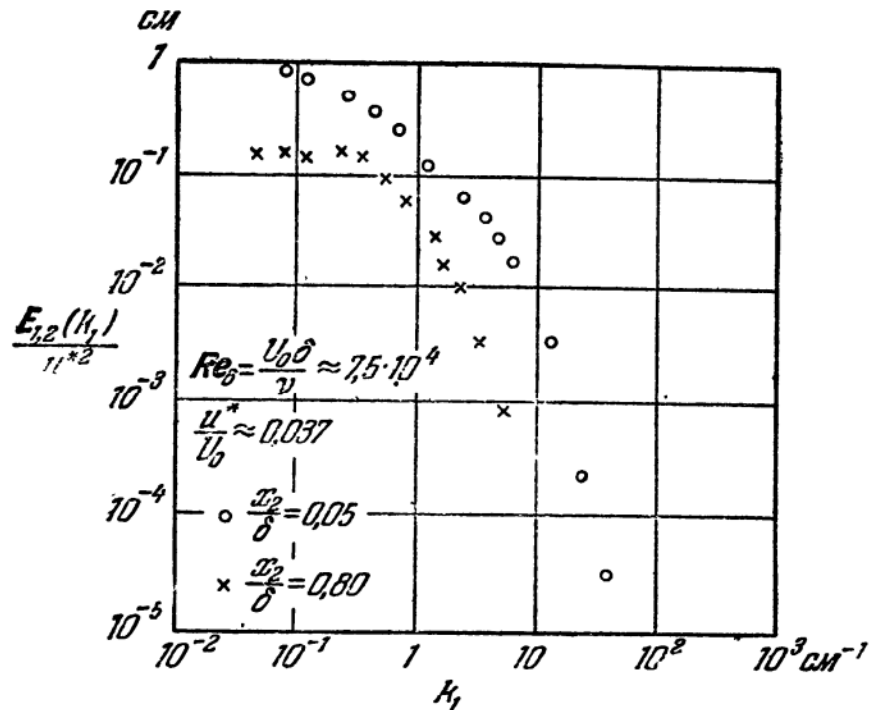


Рис. 7.24. Спектры турбулентного напряжения сдвига $u_1 u_2$ в пограничном слое на гладкой плоской пластине при отсутствии градиента давления [27].

расположенной очень близко к стенке. В диапазоне больших волновых чисел можно наблюдать определенную локальную изотропность.

Отмеченная выше анизотропность обнаруживается также в пространственных корреляциях $f(r)$ и $g(r)$ и в соответствующих им интегральных масштабах Λ_f и Λ_g . В качестве продольной корреляции Шубауэр и Клебанов [16] измеряли корреляцию между осевыми компонентами турбулентных пульсаций u_1 в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние x_1 , но расположенных в одной плоскости x_2 ; а в качестве поперечной корреляции они измеряли корреляцию между компонентами u_1 в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние x_2 , но расположенных в одном и том же поперечном сечении x_1 . В случае изотропной турбулентности должно было бы выполняться равенство $\Lambda_f = 2\Lambda_g$. Измерения Шубауэра и Клебанова во внешней области пограничного слоя ($x_2/\delta > 0,15$) по-

казывают, что отношение Λ_f/Λ_g принимает значение 3 и выше. Более того, оказывается, что величина Λ_f может стать того же порядка, как и δ . Отсюда можно сделать вывод, что турбулентность во внешней области пограничного слоя содержит вихри такого же размера, как и толщина пограничного слоя. Эти вихри очень сильно вытянуты в направлении вниз по потоку, и поэтому корреляции существуют на довольно протяженных продольных расстояниях. Такой вывод подтверждается измерениями Фавра, Гавильо и Дюма [33] пространственно-временных корреляций в пограничном слое. Эти исследователи делают вывод, что крупномасштабное движение характеризуется корреляциями, которые существуют в течение продолжительного времени в направлении как вверх, так и вниз по потоку.

§ 7.7. Сводка результатов и новые формулы для распределений осредненной скорости и напряжения сдвига

Измерения в турбулентном пограничном слое, результаты которых были рассмотрены в предыдущих параграфах, показали, что для адекватного описания течения в турбулентном пограничном слое необходимо проводить различие между внутренней и внешней областями, существенно отличающимися друг от друга происходящими в них явлениями.

Во внутренней, или пристеночной, области, толщина которой составляет примерно от 0,1 до 0,2 δ , течение определяется напряжением сдвига на стенке и вязкостью жидкости, а распределение скорости может быть описано так называемым «законом стенки»:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = f\left(\frac{x_2 u^*}{\nu}\right). \quad (7.84)$$

Изменение напряжения сдвига в этой области весьма мало, и оно в первом приближении может считаться постоянным; поэтому данную область называют также слоем постоянного напряжения.

В случае гладкой стенки эта область включает в себя прилегающий к стенке слой жидкости, где течение является, в основном, вязким, а осредненная скорость линейно возрастает с расстоянием от стенки. Эта область называется вязким подслоем и имеет толщину порядка (0,001 ÷ 0,01) δ . Остальную часть слоя постоянного напряжения занимают полностью турбулентная область и небольшая переходная область на границе с вязким подслоем. В полностью турбулентной области масштаб крупных вихрей определяется расстоянием от стенки. Если ввести коэффициент вихревой вязкости ϵ_m , то он с расстоянием от стенки будет изменяться по линейному закону; результатом этого является логарифмическое распределение осредненной скорости. Турбулентность здесь характеризуется сильной

анизотропностью. По-видимому, она находится в состоянии энергетического равновесия, так как порождение кинетической энергии турбулентности приблизительно равняется вязкой диссипации этой энергии, за исключением зоны, очень близкой к стенке, где диссипация оказывается значительно больше порождения энергии. Очевидно, что по направлению к стенке имеется поток энергии, обусловленный, по всей вероятности, силами давления.

Ввиду того, что как порождение, так и диссипация энергии турбулентности достигают во внутренней области довольно резкого максимума. Эту зону можно также рассматривать как такую область пограничного слоя, в которой имеется наибольшее порождение и диссипация энергии турбулентности.

Течение в этой внутренней области не испытывает прямого воздействия внешних условий, как, например, изменений градиента осредненного давления в направлении потока.

Во внешней области, которая занимает от 80 до 90% всего пограничного слоя, течение не зависит от вязкости жидкости, однако на него оказывает влияние напряжение сдвига на стенке. Здесь наблюдается также и сильное влияние внешних условий. Осредненную скорость в этой области удобно выразить в виде избытка над скоростью свободного потока; такое распределение называется законом избыточной скорости

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = \Psi\left(\frac{x_2}{\delta}\right). \quad (7.34)$$

Течение в данном случае обнаруживает некоторое сходство с течением в следе. Вблизи внешней границы оно, подобно свободному турбулентному течению, носит перемежающийся характер. Турбулентность здесь характеризуется крупными вихрями, вытянутыми в направлении потока. Если ввести коэффициент вихревой вязкости, то в поперечном сечении этой области он оказывается почти постоянным. Турбулентность черпает свою энергию главным образом за счет диффузии из внутренней области. Следствием этого является тот факт, что турбулентность определяется условиями во внутренней области далеко вверх по течению, т. е. распределением напряжения сдвига на стенке выше по течению. Соответственно величина $\overline{u_1 u_2} / \bar{q}^2$ имеет в этой области почти постоянное значение; по-видимому, турбулентно движущаяся жидкость достаточно долго подвергается воздействию напряжений сдвига, прежде чем достигнет своей равновесной структуры (Таунсенд [31]).

Выше уже упоминалось, что течение во внешней области испытывает сильное влияние внешних условий. Более того, наличие в этой области крупных вытянутых вихрей затрудняет быстрое восстановление картины течения после воздействия какого-либо возмущения, так как можно наблюдать, что для полного восстановления

от возмущения каким-либо турбулентным воздействием требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности. Другими словами, течение во внешней области имеет «долгую память». В отличие от этого, внутренняя область должна иметь «короткую память», т. е. быстрое восстановление от возмущений, ибо вихри в этой области чрезвычайно малы.

Эти представления основаны на опытах Клаузера [21], который исследовал затухание возмущения, созданного стержнем с диаметром 1,25 см, располагавшимся на расстояниях 3,8 и 14 см от стенки в пограничном слое, толщина которого в этом сечении составляла

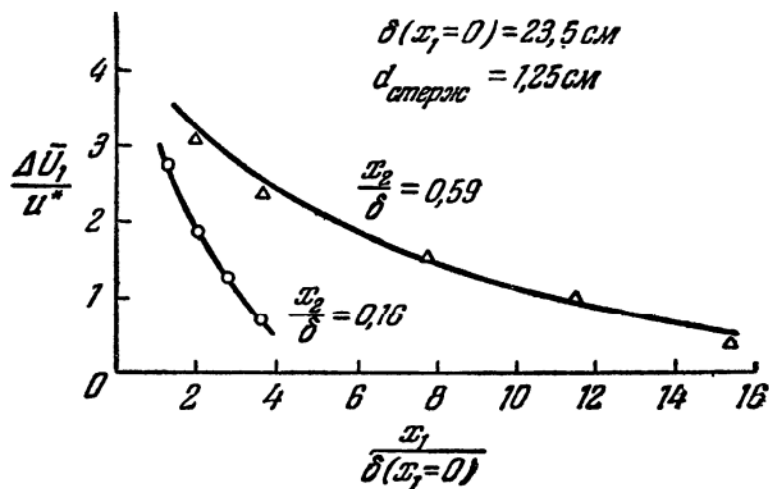


Рис. 7.25. Вырождение возмущения осредненной скорости в турбулентном пограничном слое [21].

23,5 см. Затухание максимальных отклонений $\Delta \bar{U}_1$ возмущенного профиля осредненной скорости от равновесного профиля изображено на рис. 7.25.

На основании этих экспериментальных фактов можно сделать общее заключение, что, в принципе, течение во всем пограничном слое описать с помощью лишь одного семейства параметров невозможно. Следовательно, если мы хотим использовать соображения подобия, то следует отличать друг от друга рассмотренные выше области, приписывая им разные масштабы скорости и длины.

Для внутренней области в качестве масштаба скорости можно было бы выбрать динамическую скорость u^* , а в качестве масштаба длины ν/u^* ; при таком подходе для распределения осредненной скорости получается закон стенки (7.84). Еще одним подходящим масштабом длины могла бы быть величина δ_{\log} , предложенная Таунсендом [31]; она представляет собой толщину, которую имел бы пограничный слой, если бы логарифмическое распределение осредненной скорости (7.32а) было справедливо для всей турбулентной части пограничного слоя. Тогда общее выражение для распределения

осредненной скорости описывалось бы формулой (7.36), в которую следовало бы подставить величины δ_{\log}^+ и $\xi_2 \equiv x_2/\delta_{\log}$.

Мы видели, что логарифмическое распределение осредненной скорости дает хорошее совпадение с экспериментально определенными распределениями в полностью турбулентной части внутренней области и что последние исследования не привели к сколько-нибудь лучшим результатам.

Однако для переходной области на границе вязкого подслоя исследования турбулентных характеристик позволяют значительно улучшить достигнутые результаты. Один из главных вскрытых при этом фактов состоит в том, что вязкий подслой не является непрерывным слоем, в котором не наблюдается турбулентности и осредненная скорость представляет собой неп пульсирующую стационарную величину, как это принималось в ранних исследованиях. Наоборот, турбулентные движения проникают внутрь этого подслоя почти до стенки, хотя эти движения и являются по своей природе полностью вязкими.

Но это непрерывное возмущение вязкого подслоя наружной турбулентностью представляет собой не единственный вид турбулентных движений в этом слое, как это было бы в случае, если бы поведение вязкого подслоя было полностью «пассивным». Изменения скорости вблизи стенки в пространстве и во времени и связанные с ними неблагоприятные градиенты давления вместе с пульсациями давления из-за турбулентных движений этого подслоя обуславливают локальную неустойчивость, которая приводит к созданию турбулентности вблизи стенки. Таким образом, вязкий подслой тоже является «активным». Если мы хотим представить действительную картину явлений, сопровождающих течение в этом слое, то нам следует рассматривать подслой как периодически нарастающий и разрушающийся, а не как квазистационарный (Эйнштейн и Ли [34]). В частности, если мы рассматриваем процессы переноса в этом подслое, то это специфическое поведение следует обязательно учитывать, ибо оно обуславливает непрерывный обмен жидкими частицами между вязким подслоем и областью, расположенной снаружи него. Следовательно, представление о квазистационарном вязком подслое, состоящем всегда из одних и тех же жидких частиц, является неверным.

Эйнштейн и Ли [34] и Хенретти [35] выдвинули теорию обмена веществом и импульсом в вязком подслое, основываясь на модели «прерывистой пленки». В этой теории принимается, что жидкие частицы в вязком подслое, прилегающем к стенке, уже не находятся в непрерывном контакте со стенкой, а соприкасаются с ней лишь в течение конечного промежутка времени. Предполагая, что обмен импульсом со стенкой в течение времени соприкосновения t_c можно рассматривать как нестационарный процесс молекулярной диффузии (закон Фика) а также считая, что для величины t_c и скорости v_1

жидких частиц непосредственно перед соприкосновением со стенкой можно принять некоторые средние значения, получаем следующее распределение осредненной скорости вблизи стенки:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \frac{v_1}{u^*} \int_0^1 \operatorname{erf} \left(\frac{x_2^+ u^* \sqrt{\pi}}{4v_1 \sqrt{\tau}} \right) d\tau,$$

где

$$\tau = \frac{t}{t_c}, \quad x_2^+ = \frac{x_2 u^*}{\nu}, \quad u^{*2} = 2v_1 \sqrt{\frac{\nu}{\pi t_c}}.$$

Множитель v_1/u^* можно рассматривать как произвольную постоянную, которая должна быть определена опытным путем. При $v_1/u^* = 13,5$ Хенретти получил кривую распределения осредненной скорости, немного отклоняющуюся от линейного профиля скорости $\bar{U}_1^+ = x_2^+$ уже при $x_2^+ = 3$, но весьма близко согласующуюся с данными Рейхардта (см. рис. 7.3) в первой части переходной области.

Несмотря на удовлетворительное соответствие с измеренным распределением осредненной скорости, коэффициент вихревой диффузии, соответствующий распределению скорости Хенретти, оказывается линейно зависящим от x_2 при $x_2 \rightarrow 0$. Это лишний раз указывает на нечувствительность расчетного распределения осредненной скорости к исходным предположениям, а также на неточность измерений скорости вблизи стенки посредством существующих методов измерения.

Удовлетворительного решения для распределения осредненной скорости во внешней области пограничного слоя получить пока не удалось, если не считать приближенной эмпирической формулы (7.68), предложенной Хама. Обнаружив подобие между течением в этой области и течением в следе, которое состоит в том, что процессы крупномасштабного перемешивания в обоих случаях определяются главным образом влиянием инерции, а не вязкости, Коулс [36] предложил чисто эмпирическую поправочную функцию $\varpi(\xi_2)$, аналогичную поправочной функции Милликена $h_1(\xi_2)$. Коулс полагает, что $h_1(\xi_2) = (\Pi/\kappa) \varpi(\xi_2)$; тогда уравнение (7.76) принимает вид

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^* x_2}{\nu} \right) + B + \frac{\Pi}{\kappa} \varpi(\xi_2). \quad (7.85)$$

Поправочная функция $\varpi(\xi_2)$, которая в отличие от $h(\xi_2)$ всюду положительна, имеет в общих чертах такую же форму, как и функция $h(\xi_2)$, изображенная на рис. 7.7. Коулс назвал выражение для функции $\varpi(\xi_2)$ законом следа, стремясь, таким образом, подчеркнуть сходство с течением в следе, которое и отражает этот закон. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что этот закон носит универсальный характер.

Величина Π представляет собой параметр профиля и не зависит ни от x_1 , ни от x_2 . Она связана с местным коэффициентом трения $c_f = 2u^{*2}/U_0^2$ соотношением

$$\frac{U_0}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^{*\delta}}{\nu} \right) + B + \frac{\Pi}{\kappa} \psi(1).$$

Для пограничного слоя с нулевым градиентом давления Коулс получил значение $\Pi = 0,55$ (приняв $\kappa = 0,40$ и $B = 5,1$). Определенная

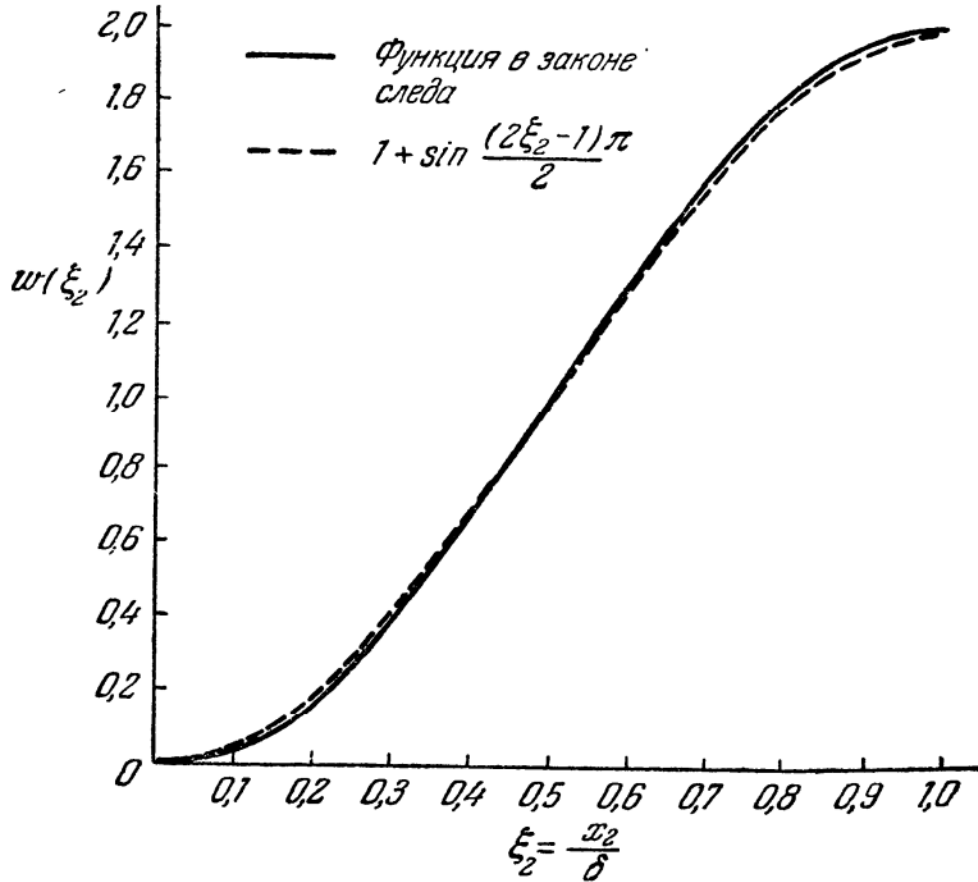


Рис. 7.26. Универсальная функция $w(\xi_2)$ в законе следа по Коулсу [36].

по опытным данным универсальная функция $w(\xi_2)$ дана в таблице, а также на рис. 7.26.

Функция $w(\xi_2)$ в законе следа

ξ_2	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$w(\xi_2)$	0	0,004	0,029	0,084	0,168	0,272	0,396	0,535	0,685	0,838	0,994
ξ_2		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$w(\xi_2)$		1,152	1,307	1,458	1,600	1,729	1,840	1,926	1,980	1,999	2,00

При $\xi_2 = 1$ эта функция достигает значения $w(1) = 2$, выбранного в качестве условия нормировки. В качестве второго условия

нормировки Коулс предложил

$$\int_0^2 \xi_2 d\omega = 1 \quad \text{или} \quad \int_0^1 \omega d\xi_2 = 1.$$

Анализ эмпирической кривой $\omega(\xi_2)$ показывает, что эта функция не является строго антисимметричной относительно линии $\xi_2 = 0,5$, однако наблюдающиеся при этом отклонения весьма малы. Действительно функция $\omega(\xi_2)$ в законе следа может быть аппроксимирована антисимметричной функцией

$$\omega(\xi_2) = 1 + \sin \frac{(2\xi_2 - 1)\pi}{2},$$

которая для многих практических приложений является достаточно близким приближением. Как видно из рис. 7.26, различие между синусоидой и эмпирической кривой $\omega(\xi_2)$ заметно лишь вблизи $\xi_2 = 0,1$ и $\xi_2 = 0,9$.

Таким образом, для пограничного слоя с нулевым градиентом давления, следуя Коулсу, при $\kappa = 0,40$ и $\Pi = 0,55$ имеем

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -2,50 \ln \frac{x_2}{\delta} + 1,38 \left[2 - \omega \left(\frac{x_2}{\delta} \right) \right]. \quad (7.85a)$$

На рис. 7.27 дается сравнение этого распределения осредненной скорости с экспериментальным распределением, полученным

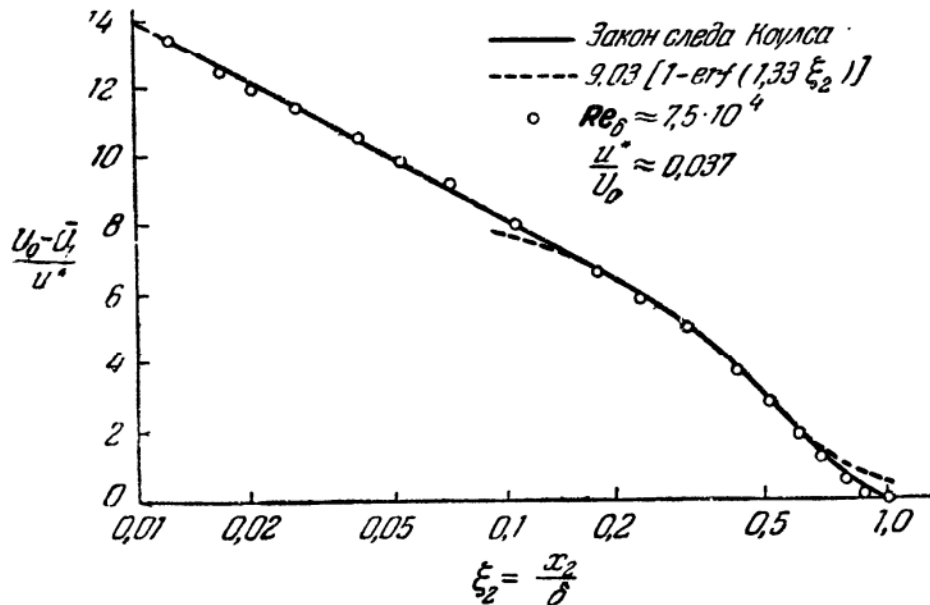


Рис. 7.27. Сравнение вычисленной избыточной скорости с экспериментальными данными Клебанова [27].

Клебановым [27]. Сплошная кривая на этом рисунке соответствует эмпирической функции $\omega(\xi_2)$, предложенной Коулсом. Практически такая же кривая получается, если в качестве $\omega(\xi_2)$ выбрать синусоиду;

исключение составляет лишь небольшой участок вблизи $\xi_2 = 0,9$, где синусоида приводит к несколько завышенным значениям $(U_0 - \bar{U}_1)/u^*$.

При помощи уравнения (7.85) или (7.85а) можно, пользуясь уравнением неразрывности, вычислить распределение поперечной компоненты осредненной скорости \bar{U}_2 . Тогда по известным компонентам осредненной скорости \bar{U}_1 и \bar{U}_2 оказывается возможным рассчитать распределение напряжения сдвига. При этом из уравнения (7.3) следует, что для внешней области

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = 1 + \frac{1}{u^{*2}} \int_0^{x_2} \left(\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right) dx_2. \quad (7.86)$$

Коулс, исходя из уравнения (7.85), произвел подобные расчеты для поперечного сечения пограничного слоя, исследованного Клебановым, экспериментальные данные которого представлены на рис. 7.28. Согласие между измеренными и вычисленными значениями является

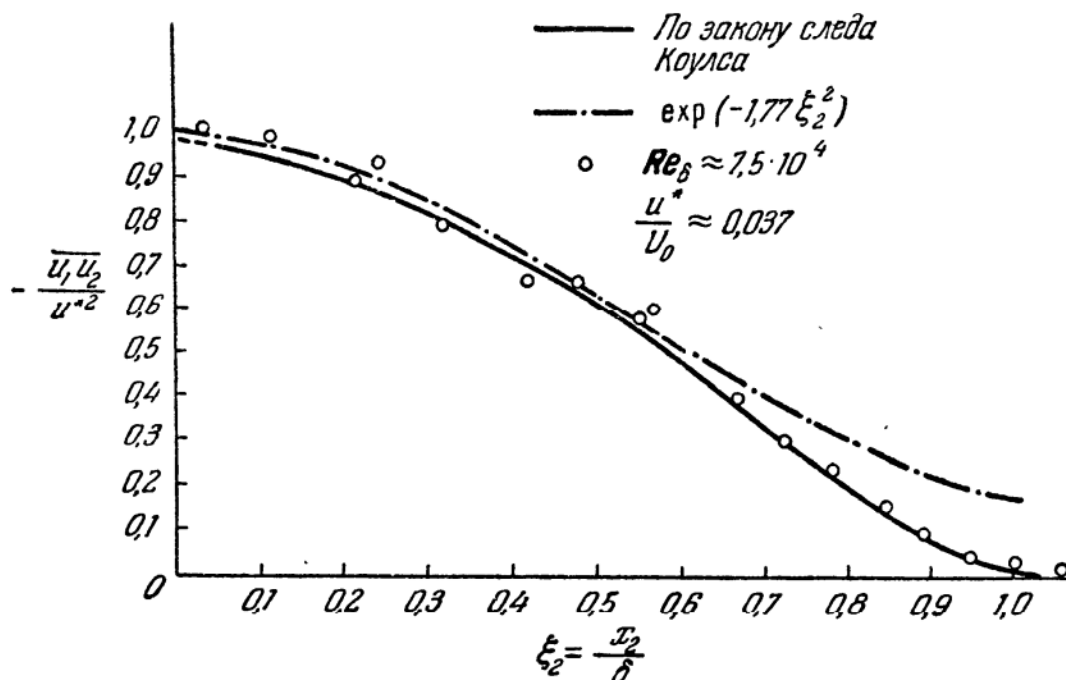


Рис. 7.28. Расчетные распределения напряжения сдвига и экспериментальные значения, измеренные Клебановым [27].

вполне удовлетворительным. Отмеченное совпадение не представляется удивительным, поскольку результаты расчета являются следствием только уравнений движения и неразрывности при хорошо подобранном распределении осредненной скорости. Его следует рассматривать скорее как доказательство надежности измерений Клебанова. Приведенные здесь экспериментальные данные, которые одинаковы с изображенными на рис. 7.13, отличаются от них неболь-

шим смещением по оси ξ_2 , так как в расчетах Коулса взято меньшее значение местной толщины пограничного слоя, а именно $\delta = 7,2$ см, по сравнению со значением $\delta = 7,6$ см, принятым Клебановым.

В то время как закон избыточной скорости приводит к полному подобию профилей скорости в различных поперечных сечениях полностью развитого турбулентного пограничного слоя, этого нельзя сказать о распределении величины \bar{U}_2/u^* и напряжения сдвига. Тот факт, что одновременно получить подобие и распределений напряжений сдвига, и распределений скорости невозможно, следует непосредственно из уравнения движения

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}, \quad (7.87)$$

если применить к нему те же преобразования, которые были использованы в главе 6, выбрав в качестве масштабов скорости и длины соответственно u^* и δ . Строго говоря, масштаб скорости в этом случае должен, по-видимому, отличаться от того, который использовался для внутренней, пристеночной, области пограничного слоя. Таунсендом [31] было показано, что для конечных чисел Рейнольдса распределение осредненной скорости зависит от числа Рейнольдса, а отношения масштабов скорости и длины для внешней области к соответствующим масштабам для внутренней области не сохраняют постоянных значений, но что разность между масштабом скорости и u^* меньше произведения величин u^*/U_0 и u^* , т. е. пренебрежимо мала.

В предшествующем анализе предполагалось подобие профилей $(U_0 - \bar{U}_1)/u^*$, в результате чего профили напряжения сдвига оказались неподобными.

С другой стороны, можно также исходить из предположения о подобии профилей напряжения сдвига; тогда профили скорости уже не будут подобными. При изменении числа Рейнольдса меняется диапазон волновых чисел турбулентности. Однако картина движения крупных вихрей не претерпевает значительных изменений в зависимости от числа Рейнольдса, и поскольку кинетическая энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига определяются главным образом движением именно этих крупных вихрей, то это говорит в пользу предположения об универсальности распределения напряжения сдвига. Хотя получающиеся при этом профили скорости и не обладают строгим подобием, различия между ними вряд ли выходят за рамки разброса экспериментальных точек. Если в отличие от этого принять предположение о подобии профилей скорости, а затем, пользуясь указанным выше методом, вычислить соответствующие распределения напряжения сдвига, то эти распределения окажутся неподобными, как этого и следовало ожидать. Однако расхождения между профилями напряжения сдвига больше, чем отклонения,

обнаруженные для профилей скорости; на фоне разброса экспериментальных точек они все же различимы. Тем не менее Клаузер пришел к выводу, что, хотя турбулентный пограничный слой никогда не обладает строгой универсальностью одновременно в отношении распределений осредненной скорости, напряжения сдвига или энергии турбулентности, все же отклонения от универсальности малы и во многих практических случаях ими даже можно пренебречь.

В соответствии с этим, если одновременно принять предположения о подобии как профилей осредненной скорости, так и профилей напряжения сдвига, то можно сделать еще один шаг вперед и предположить, что течение во внешней области является автомодельным, когда турбулентное течение порождается осредненным движением с относительно большой скоростью, не очень сильно отличающейся от скорости свободного потока. В то же время можно воспользоваться следующими двумя эмпирическими фактами: (1) подобием картин течения во внешней области турбулентного пограничного слоя и в следе, а также (2) приблизительным постоянством коэффициента вихревой вязкости в этой области. В этом случае можно ожидать, что решение для распределения осредненной скорости будет подобно решению для течения в следе. Это возможно, если дифференциальные уравнения в обоих этих случаях одинаковы. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение движения (7.87) в следующем виде:

$$U_0 \left(1 - \frac{U_0 - \bar{U}_1}{U_0} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} (U_0 - \bar{U}_1) + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (U_0 - \bar{U}_1) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}.$$

Когда

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{U_0} \ll 1$$

и если воспользоваться тем же методом оценки порядков величин, что и в § 6.2, то в результате получим

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x_1} (U_0 - \bar{U}_1) \approx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12}.$$

Это приближенное уравнение, которое имеет такой же вид, как и в случае течения в следе за цилиндром, было использовано Таунсендом [31] для расчета распределения осредненной скорости во внешней области при одновременном предположении об автомодельности картины течения (по крайней мере движения крупных вихрей) в этой области. Однако условие $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0 \ll 1$ показывает, что использованное приближенное дифференциальное уравнение справедливо лишь для наиболее удаленной от стенки части рассматриваемой области. Размеры этой наиболее удаленной части внешней области с повышением числа Рейнольдса увеличиваются (Таунсенд [31]), так что при предельно больших числах Рейнольдса предположение

об автомодельности течения может быть распространено на довольно значительную часть пограничного слоя. Далее, Таунсенд ввел предположение о том, что

$$\sigma_{12} = -\rho (\epsilon_m)_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} (U_0 - \bar{U}_1), \quad (7.88)$$

где величина $(\epsilon_m)_{11}$ может пока считаться функцией x_1 .

Положим теперь

$$U_0 - \bar{U}_1 = u^* f(\xi_2), \quad (7.70)$$

где $\xi_2 = x_2/\delta$. Динамическая скорость u^* может зависеть от x_1 . Если учесть, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\xi_2} - \frac{\xi_2}{\delta} \frac{d\delta}{dx_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)_{x_1}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)_{x_1},$$

то уравнение движения преобразуется к виду

$$U_0 \left[\frac{du^*}{dx_1} f(\xi_2) - \frac{u^*}{\delta} \frac{d\delta}{dx_1} \xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2) \right] = (\epsilon_m)_{11} \frac{u^*}{\delta^2} \frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2)$$

или

$$-\frac{d\delta}{dx_1} \xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2) + \delta \frac{U_0}{u^*} \frac{d}{dx_1} \left(\frac{u^*}{U_0}\right) f(\xi_2) = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{U_0 \delta} \frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2). \quad (7.89)$$

За исключением окрестности точки $\xi_2 = 1$, функции $f(\xi_2)$ и $\xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2)$ одинаковы по порядку величины.

Но поскольку

$$\frac{U_0}{u^*} \frac{d}{dx_1} \left(\frac{u^*}{U_0}\right) \ll \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx_1},$$

то при больших числах Рейнольдса второй член в левой части уравнения (7.89) становится малым по сравнению с первым членом. Это можно показать, воспользовавшись, например, соотношением (7.47). При больших числах Рейнольдса коэффициент трения c_f и относительная динамическая скорость u^*/U_0 становятся весьма малыми. Дифференцируя уравнение (7.47) по x_1 , получаем

$$-\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx_1} = \left[\frac{1}{A} \left(\frac{U_0}{u^*}\right)^2 + \frac{U_0}{u^*} \right] \frac{d}{dx_1} \left(\frac{u^*}{U_0}\right),$$

откуда следует, что величина

$$\frac{U_0}{u^*} \frac{d}{dx_1} \left(\frac{u^*}{U_0}\right)$$

при больших числах Рейнольдса оказывается малой по сравнению с $(1/\delta)(d\delta/dx_1)$. Это позволяет пренебречь вторым членом в левой части уравнения (7.89), которое в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2}{d\xi_2^2} f(\xi_2) + \frac{U_0\delta}{(\epsilon_m)_{11}} \frac{d\delta}{dx_1} \xi_2 \frac{d}{d\xi_2} f(\xi_2) = 0. \quad (7.90)$$

Поскольку первый член здесь зависит только от ξ_2 , то уравнение может выполняться, лишь если

$$\frac{U_0\delta}{(\epsilon_m)_{11}} \frac{d\delta}{dx_1} = a^2, \quad (7.91)$$

т. е. если эта величина является постоянной и не зависит от x_1 . Решение дифференциального уравнения (7.90) записывается в форме

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = f(\xi_2) = C \int_{\xi_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} a^2 \xi_2^2\right) d\xi_2$$

или

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = \frac{C}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \xi_2\right) \right], \quad (7.92)$$

где

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} \exp(-u^2) du.$$

Тогда на основании соотношения (7.88) получаем следующую формулу для распределения напряжения сдвига:

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{u^{*2}} = \exp\left(-\frac{1}{2} a^2 \xi_2^2\right) \quad (7.93)$$

и

$$C \frac{(\epsilon_m)_{11}}{u^* \delta} = 1.$$

Полученные здесь решения для распределений избыточной скорости и напряжения сдвига были использованы для сравнения с измерениями Клебанова. На рис. 7.27 представлены результаты расчета распределения скорости, полученные при $a^2 = 3,54$ и $C = 13,5$. Совпадение с экспериментальными данными наблюдается лишь в ограниченном диапазоне. Заметные отклонения от измеренных значений имеют место при $\xi_2 < 0,2$ и $\xi_2 > 0,7$.

На рис. 7.28 изображено распределение напряжения сдвига, соответствующее уравнению (7.93). В диапазоне $\xi_2 < 0,6$ наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментальными значениями, но выше значения $\xi_2 = 0,7$ расчетные величины, как и в случае распре-

деления скорости, лежат значительно выше экспериментальных. Этих слишком высоких значений в диапазоне $\xi_2 > 0,7$ и следовало ожидать, так как при предположении о постоянстве величины коэффициента вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{11}$ в поперечном сечении пограничного слоя не учитывается влияние перемежаемости в этой области. Как показывает рис. 7.18, коэффициент перемежаемости Ω при $\xi_2 = 0,7$ становится значительно меньше единицы. Следовательно, если вместо величины $(\epsilon_m)_{11}$ в соотношении (7.88) подставить $(\epsilon_m)_{11} \Omega$, то можно ожидать лучшего совпадения. В то же время любопытно заметить, что весьма удовлетворительное согласие с данными измерений наблюдается в диапазоне $\xi_2 < 0,5$ (в случае распределения напряжения сдвига даже вплоть до $\xi_2 \rightarrow 0$), где упрощенное дифференциальное уравнение (7.90), строго говоря, уже несправедливо, так как предположение, что $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0 \ll 1$, здесь не выполняется. С практической точки зрения это можно рассматривать как случайную погрешность, однако с теоретической точки зрения этот факт является весьма неудовлетворительным.

§ 7.8. Турбулентное течение в прямой круглой трубе. Распределение осредненной скорости

Как указывалось в § 7.1, мы рассмотрим лишь течение в условиях полностью турбулентного движения. Для осуществления этих условий требуется определенный входной участок. Из опытов с потоками в гладких круглых трубах следует, что при свободном от возмущений входе жидкости в трубу переход к турбулентному течению происходит при $U_0 x/\nu \geq 10^5$; здесь U_0 — скорость равномерного потока на входе в трубу. Эта величина примерно совпадает с соответствующей величиной для течения в пограничном слое на плоской гладкой пластине (см. § 7.3). Этому критическому значению числа Рейнольдса Re_{x_1} должна соответствовать критическая длина входного участка:

$$\left(\frac{x}{D}\right)_{\text{крит}} \geq \frac{10^5}{Re_D},$$

где $Re_D = \bar{U}_{\text{ср}} D/\nu$, $\bar{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость в поперечном сечении трубы, принятая равной U_0 , а D — диаметр трубы.

При наличии возмущений потока на входе в трубу для перехода течения в турбулентное требуется меньшая длина. Однако, чтобы выполнялось условие полностью развитого турбулентного течения, требуется значительно большая длина.

Для случая, когда течение жидкости на входе в трубу уже является турбулентным, Лацко [37] вычислил расстояние от входа, на котором распределение скорости по всему поперечному сечению

трубы принимает форму профиля, соответствующего закону « $1/7$ ». При этом оказалось, что

$$\frac{x}{D} = 0,693 \operatorname{Re}_D^{1/4}.$$

Эта формула дает значительно более короткие входные участки, нежели когда-либо найденные экспериментально. По измерениям Кирстена [38] длина входного участка составляет в зависимости от числа Рейнольдса от 50 до 100 диаметров трубы. Но в то же время Никурадзе [39] для случая возмущенного на входе в трубу потока получил полностью турбулентное течение на расстоянии от $x/D = 25$ до 40, причем значение в 40 калибров было получено при $\operatorname{Re}_D = 9 \cdot 10^5$. Теоретическая формула Лацко дает в этом случае длину входного участка, равную 21 диаметру трубы.

Для практических целей в качестве минимальной длины входного участка можно рекомендовать величину, равную 40 диаметрам, которая была получена Никурадзе.

В § 7.1 мы анализировали сходство и различие между турбулентными течениями в пограничном слое и в трубе. Как и в случае пограничного слоя, при течении в трубе можно выделить «внутреннюю», пристеночную, область и «внешнюю», удаленную от стенки, область, причем последняя занимает наибольшую часть поперечного сечения трубы. Пристеночная область включает в себя вязкий подслой вблизи стенки и турбулентный слой с переходной областью между ними. Течение в пристеночной области не зависит от условий течения вдали от стенки, и поэтому его можно считать одинаковым для пограничного слоя и для течения в трубе. Течение во внешней области может быть в этих двух случаях неодинаковым. В самом деле, при течении в трубе взаимодействие с нетурбулентным потоком отсутствует и перемежаемости турбулентности не наблюдается; в этом заключается одно из отличий течения в трубе от течения в пограничном слое. Другое отличие состоит в том, что условия течения в трубе не зависят от x , следствием чего является отсутствие радиальной скорости \bar{U}_2 или \bar{U}_r и равномерность распределения статического давления в поперечном сечении трубы. Из условия равновесия между силами напряжения сдвига и силами давления следует, что распределение напряжения сдвига должно строго подчиняться линейной зависимости

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} = \frac{2r}{D} = 1 - \frac{2x_2}{D} = 1 - \xi_2, \quad (7.94)$$

где r — расстояние от оси трубы, а x_2 — расстояние от стенки.

Мы уже видели, что в турбулентном пограничном слое распределение напряжения сдвига является линейным только во внешней области, и то лишь приближенно (см. рис. 7.19), в то время как в пристеночной области напряжение сдвига примерно постоянно,

В пристеночной области течения в трубе напряжение сдвига существенно непостоянно, хотя отличие его от напряжения сдвига у стенки σ_w может быть очень малым из-за того, что пристеночная область является относительно тонкой. По этой причине пристеночную область течения в трубе тоже обычно принято считать слоем постоянного напряжения, несмотря на некорректность этого предположения. Принятое предположение о подобии течений в пристеночных областях в этих двух случаях по меньшей мере не противоречит тому небольшому количеству экспериментальных данных, которые получены до настоящего времени.

Таким образом, в пристеночной области распределение осредненной скорости для гладкой стенки подчиняется соотношению (7.38):

$$\frac{\bar{U}_x}{u^*} = \varphi(\delta^+ \xi_2), \quad (7.38)$$

где в выражение для δ^+ подставлена величина $\delta = D/2$, т. е.

$$\delta^+ = \frac{u^* D}{2\nu}.$$

Для вязкого подслоя имеем специальное соотношение

$$\frac{\bar{U}_x}{u^*} = \frac{u^* x_2}{\nu}, \quad (7.27)$$

а для полностью турбулентной части пристеночной области — выражение

$$\frac{\bar{U}_x}{u^*} = A \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + B. \quad (7.32a)$$

Для переходной области можно использовать выражения, принятые в случае пограничного слоя.

Обратимся вновь к рис. 7.3, на котором изображены результаты измерений, проведенных Лауфером [41] и Рейхардтом [12], в пристеночной области. Сравнение с рис. 7.2 показывает, что в промежуточном диапазоне вблизи $u^* x_2/\nu = 100$ наблюдается удовлетворительное совпадение между результатами измерений при течении в трубе и в пограничном слое.

Таким образом, для полностью турбулентной части пристеночной области, где справедливо универсальное логарифмическое распределение осредненной скорости (7.32a), должны применяться те же значения постоянных, а именно: $A = 2,44$ и $B = 4,9$, хотя следует заметить, что, как и в случае пограничного слоя, различные экспериментаторы использовали другие значения этих постоянных. Например, Таунсенд [31] предлагает такое же значение для A , а для B — величину 5,85.

Как уже упоминалось при рассмотрении течения в пограничном слое, «толщина» вязкого подслоя определяется величиной $u^* \delta_l/\nu =$

$\approx 5 \div 7$, а «толщина» переходной области, за пределами которой течение является полностью турбулентным, — величиной $u^* \delta_t / \nu \approx 30$. Чтобы дать представление о толщине δ_t , приведем расчетные значения δ_t / D при различных значениях $Re_D = \bar{U}_{cp} D / \nu$. Результаты этого расчета показаны в приведенной ниже таблице.

Re_D	$5 \cdot 10^3$	10^4	10^5	10^6
$\frac{\delta_t}{D}$	0,1	0,05	0,006	0,0008

Для «внешней» (относительно стенки) области, которую в случае течения в трубе следует называть областью «ядра», осредненную скорость, как и прежде, удобно представить в виде избытка над

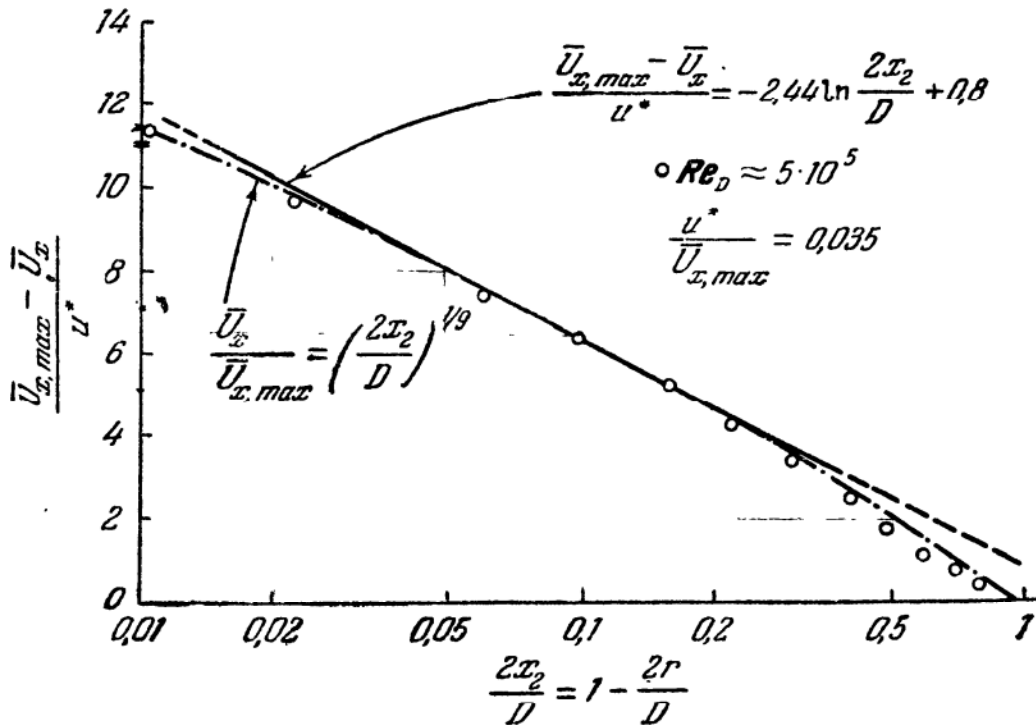


Рис. 7.29. Распределение осредненной скорости в ядре турбулентного потока в трубе, изображенное в полулогарифмическом масштабе [41].

максимальной скоростью в центре трубы. По аналогии с соответствующим выражением (7.6ба) для течения в пограничном слое распределение скорости в пристеночной области запишем следующим образом:

$$\frac{\bar{U}_{x, \max} - \bar{U}_x}{u^*} = -A \ln \xi_2 + B^*,$$

где $\xi_2 = 2x_2 / D = 1 - 2r / D$.

На рис. 7.29 в полулогарифмическом масштабе изображен график распределения избыточной скорости в зависимости от ξ_2 по данным Лауфера [41] для $\bar{U}_{x, \max} D/\nu = 5 \cdot 10^5$; здесь же представлена кривая логарифмического распределения при $A = 2,44$ и $B^* = 0,8$.

Если сравнить эти величины с соответствующими значениями для течения в пограничном слое (см. рис. 7.4), то можно заметить, что величина B^* для течения в трубе значительно меньше. Это означает, что отклонение действительного распределения скорости от логарифмического при течении в трубе слабее. Однако отсюда не следует, что пристеночная область, для которой справедливо логарифмическое распределение скорости, при течении в трубе по своим размерам больше. Как можно видеть из рис. 7.29, отклонения от логарифмического распределения скорости становятся заметными примерно при $\xi_2 > 0,15$, точно так же, как и в случае течения в пограничном слое. Однако величина этих отклонений в данном случае значительно меньше.

Следовательно, если и здесь ввести поправочную функцию $h(\xi_2)$ по формуле

$$\frac{\bar{U}_{x, \max} - \bar{U}_x}{u^*} = -2,44 \ln \xi_2 + 0,8 + h(\xi_2), \quad (7.95)$$

то эта поправочная функция $h(\xi_2)$ будет иметь намного меньшие значения, чем соответствующая функция для течения в пограничном

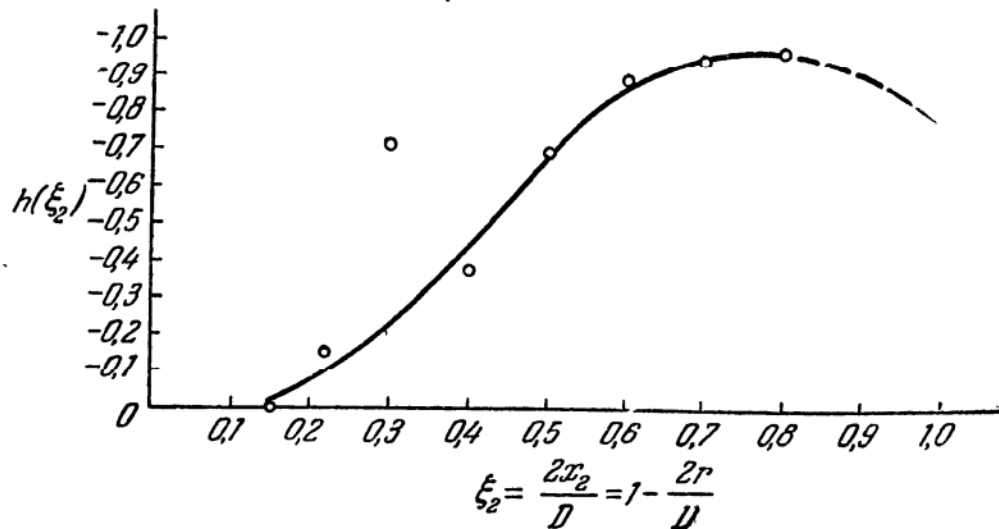


Рис. 7.30. Поправочная функция $h(\xi_2)$ для логарифмического распределения избыточной скорости при течении в трубе.

слое. На рис. 7.30 изображена поправочная функция, полученная на основании опытных данных Лауфера; этот рисунок интересно сравнить с рис. 7.7.

Милликен [7] тоже сделал попытку найти поправочную функцию $h_1(\xi_2)$, определяемую соотношением (7.76), воспользовавшись для

этой цели данными измерений Никурадзе [39, 40] для распределения осредненной скорости при течении в трубе; полученные им величины в случае трубы значительно меньше, чем для пограничного слоя.

Это относительно малое отклонение действительного распределения скорости от логарифмического вблизи центра трубы позволяет понять, почему как раньше, так и теперь для практических приложений используется логарифмическое распределение скорости, распространенное на всю область течения в трубе.

Никурадзе [39, 40], основываясь на своих опытах по течению в круглых трубах с гладкими и шероховатыми стенками, получил следующие логарифмические распределения скорости:

для гладкой трубы

$$\frac{\bar{U}_x}{u^*} = 2,5 \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + 5,5;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\bar{U}_x}{u^*} = 2,5 \ln \frac{x_2}{k} + 8,48. \quad (7.96)$$

Тогда для средней скорости $\bar{U}_{\text{ср}}$ имеем:

для гладкой трубы

$$\frac{\bar{U}_{\text{ср}}}{u^*} = 2,5 \ln \frac{u^* D}{2\nu} + 1,75;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\bar{U}_{\text{ср}}}{u^*} = 2,5 \ln \frac{D}{2k} + 4,73. \quad (7.97)$$

Динамическую скорость u^* можно выразить через напряжение сдвига на стенке или через градиент давления по формуле

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{4}{D} \sigma_w = -\frac{4}{D} \rho u^{*2}.$$

Непосредственное определение величины $\bar{U}_{\text{ср}}/u^*$ по данным Никурадзе о градиенте давления позволяет получить следующие зависимости:

для гладкой трубы

$$\frac{\bar{U}_{\text{ср}}}{u^*} = 2,44 \ln \frac{u^* D}{2\nu} + 2,0;$$

для шероховатой трубы

$$\frac{\bar{U}_{\text{ср}}}{u^*} = 2,44 \ln \frac{D}{2k} + 4,9. \quad (7.98)$$

Значения постоянных здесь и в приведенных выше выражениях, полученных из распределений скорости, несколько отличаются; это различие можно объяснить небольшими отклонениями логарифмического распределения скорости от действительного.

Следует еще раз напомнить, что численные постоянные в уравнениях для шероховатой трубы соответствуют более или менее равномерной песочной шероховатости. Для других типов шероховатости эти постоянные будут иметь иные значения в зависимости от способа определения параметра шероховатости k . Представляется возможным и обычно принято определять эквивалентную песочную шероховатость, что позволяет пользоваться теми же уравнениями (7.97) или (7.98).

При анализе течения в трубах градиент давления в потоке принято выражать вместо динамической скорости u^* через коэффициент трения λ , который определяется формулой

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{U}_{\text{ср}}^2,$$

откуда

$$\lambda = 8 \left(\frac{u^*}{\bar{U}_{\text{ср}}} \right)^2. \quad (7.99)$$

В соответствии с этим распределение скорости можно выразить через λ вместо u^* . Уравнения (7.98) дают следующие соотношения между λ и Re_D , а также между λ и k/D :

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2,44 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda}{32}} \text{Re}_D \right) + 2,0$$

и

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2,44 \ln \frac{D}{2k} + 4,9. \quad (7.98a)$$

Если распределение скорости выразить теперь через λ , то приходим к выводу, что отношение $\bar{U}_x / \bar{U}_{x, \text{max}}$ зависит только от $2x_2/D$ и λ :

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x, \text{max}}} = f \left(\frac{2x_2}{D}, \lambda \right).$$

Этот результат справедлив как для гладких, так и для шероховатых труб.

В § 7.5 было уже показано, что распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое удается хорошо аппроксимировать простым степенным законом при условии, что показатель степени зависит все же от числа Рейнольдса.

Такая же аппроксимация может быть применена к распределению скорости при течении в трубе. Следовательно, можно воспользоваться

уравнением (7.58) или вместо него уравнением

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x, \max}} = \left(\frac{2x_2}{D} \right)^{1/n}.$$

Поскольку это распределение скорости зависит лишь от коэффициента трения λ , то отсюда следует, что как для гладких, так и для шероховатых труб показатель n является функцией только λ .

Нуннер [42] определил зависимость n от λ , используя для этой цели результаты собственных измерений в гладких и шероховатых

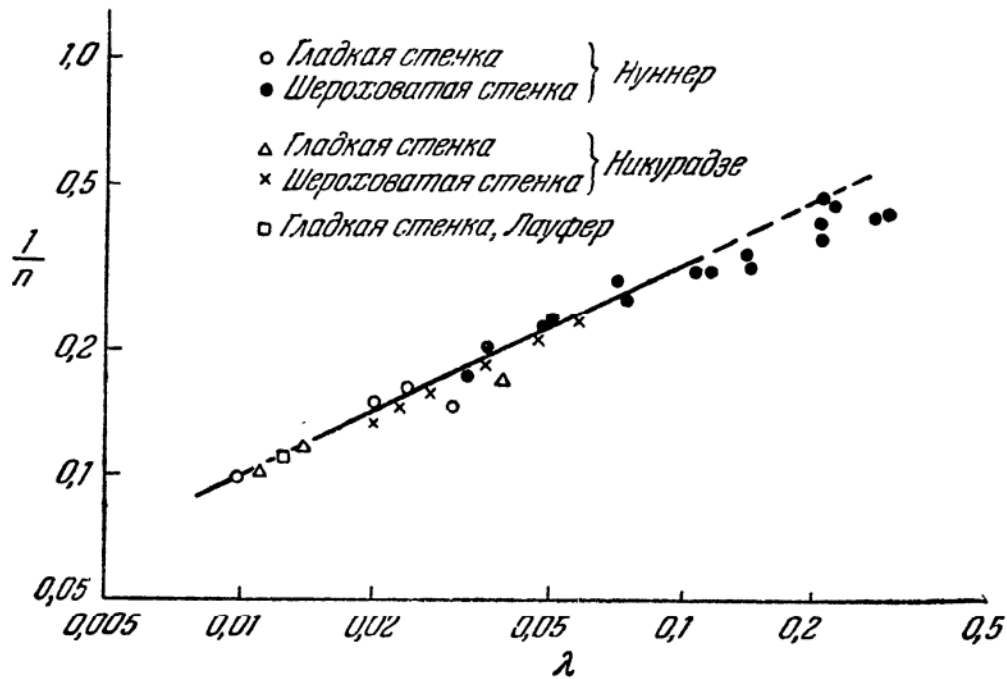


Рис. 7.31. Связь между показателем степени $1/n$ в степенном распределении скорости и коэффициентом трения λ [42].

трубах, а также данные Никурадзе [39, 40]. Как показывает рис. 7.31, эта зависимость в первом приближении выражается простой формулой

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\lambda}, \quad (7.100)$$

справедливой в диапазоне $\lambda < 0,1$. При $\lambda > 0,1$ значения n получаются несколько выше.

Степенной закон распределения скорости был использован также применительно к данным Лауфера. Результаты расчета при значении $n = 9$, соответствующем $\lambda = 0,013$ для гладкой трубы, и $Re_D \approx 5 \cdot 10^5$ изображены на рис. 7.29; отсюда видно, что согласие между расчетным и измеренным распределениями скорости в самом деле является вполне удовлетворительным.

§ 7.9. Измерение характеристик турбулентности при течении в трубе

Наиболее надежные и наиболее исчерпывающие измерения характеристик турбулентности при течении в трубе были произведены Лауфером [41]. Эти опыты проводились на прямой цельнотянутой медной трубе длиной около 500 см с внутренним диаметром 24,7 см. Скорость воздушного потока составляла в этих опытах два значения: одно, соответствующее максимальной осредненной скорости

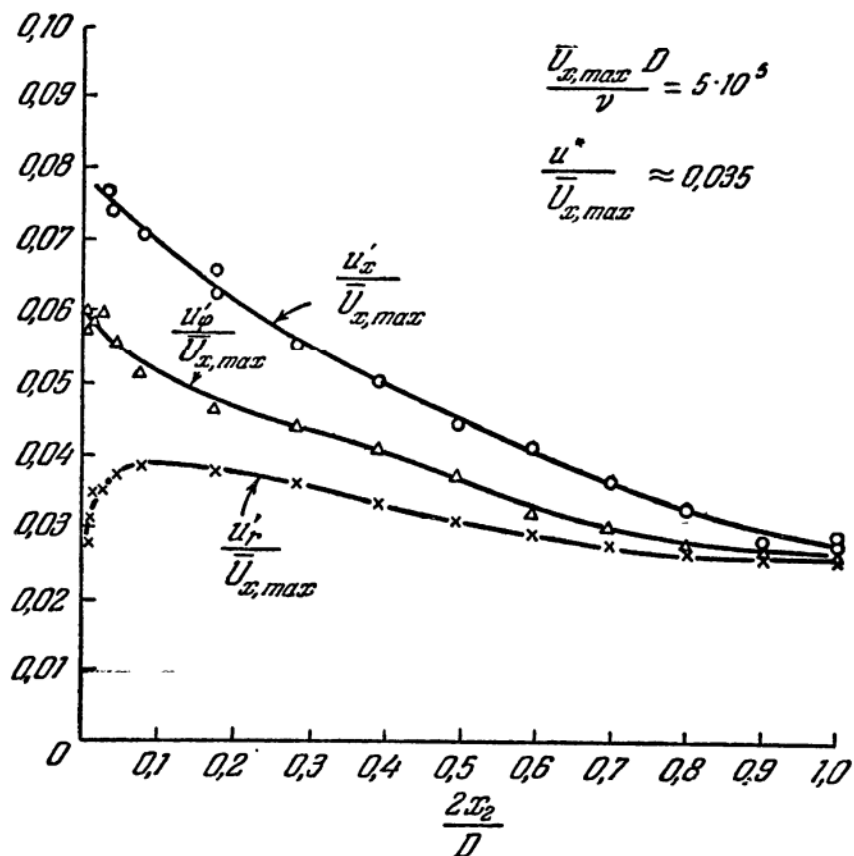


Рис. 7.32. Относительная интенсивность турбулентности потока в трубе [41].

$\bar{U}_{x,max} \approx 3$ м/сек, и другое, соответствующее $\bar{U}_{x,max} \approx 30$ м/сек. Числа Рейнольдса $\bar{U}_{x,max} D/\nu$, соответствующие этим скоростям, составляют 50 000 и 500 000. Распределения осредненной скорости и характеристик турбулентности измерялись в этих опытах даже в вязком подслое. По измеренному градиенту осредненной скорости вблизи стенки, а также по измеренному градиенту давления на оси можно было определить напряжение сдвига на стенке. Для указанных выше двух значений числа Рейнольдса динамическая скорость $u^*/\bar{U}_{x,max}$ составляла соответственно $\sim 0,046$ и $0,035$.

Распределения компонент относительной интенсивности турбулентности $u'_x/\bar{U}_{x,max}$, $u'_r/\bar{U}_{x,max}$ и $u'_\phi/\bar{U}_{x,max}$ изображены на рис. 7.32.

Сравнение с рис. 7.10 показывает, что эти характеристики практически имеют ту же величину, как и в пограничном слое (динамические скорости в обоих случаях примерно одинаковы). Условия изотропности, как и в пограничном слое, достигаются в области, значительно удаленной от стенки. Вблизи стенки поперечная компонента интенсивности турбулентности u'_r по своей величине близка

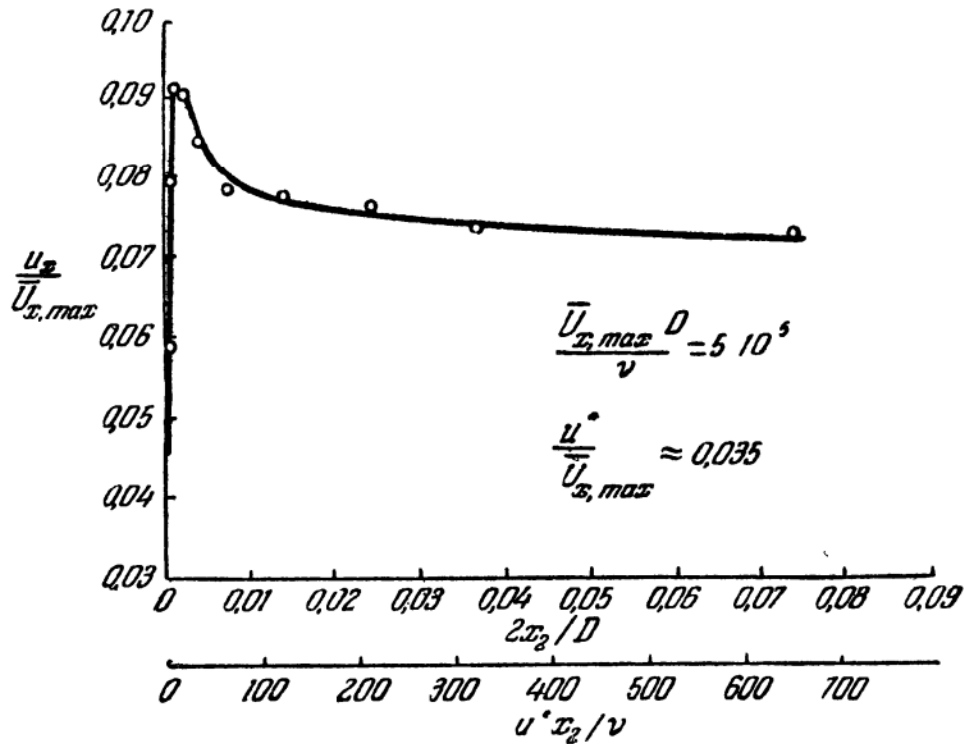


Рис. 7.33. Относительная интенсивность турбулентности $u'_x/\bar{U}_{x,\max}$ вблизи стенки при течении в трубе [41].

к динамической скорости u^* , а осевая компонента интенсивности турбулентности u'_x превышает динамическую скорость более чем в два раза.

На рис. 7.32 осевая компонента u'_x не имеет максимума; он достигается в области, очень близкой к стенке. Величина $u'_x/\bar{U}_{x,\max}$ в этой области изображена на рис. 7.33, а отношение u'_x/u^* вместе с u'_r/u^* и u'_φ/u^* — на рис. 7.34. Из рассмотрения этих рисунков можно сделать вывод, что величина u'_x достигает своего максимального значения в окрестности $u^* x_2/\nu = 15$, т. е. приблизительно при том же значении этого параметра, как и в случае течения в пограничном слое, исследованного Клебановым (см. рис. 7.12). Измерения Лауфера при $\bar{U}_{x,\max} D/\nu = 5 \cdot 10^4$ приводят к такому же результату. Если вместо $u^* x_2/\nu$ пользоваться величиной $2x_2/D$, то максимальное значение $u'_x/\bar{U}_{x,\max}$ получается при $2x_2/D \approx 0,0017$.

Распределение компонент интенсивности турбулентности, отнесенных к местной осредненной скорости \bar{U}_x , в пристеночной области изображено на рис. 7.35. Как и при течении в пограничном слое (см. рис. 7.12), компонента интенсивности турбулентности u'_x/\bar{U}_x достигает постоянного (и в то же время максимального) значения в вязком подслое. В противоположность этому, компоненты u'_φ/\bar{U}_x и u'_r/\bar{U}_x вблизи стенки стремятся, по-видимому, к нулю.

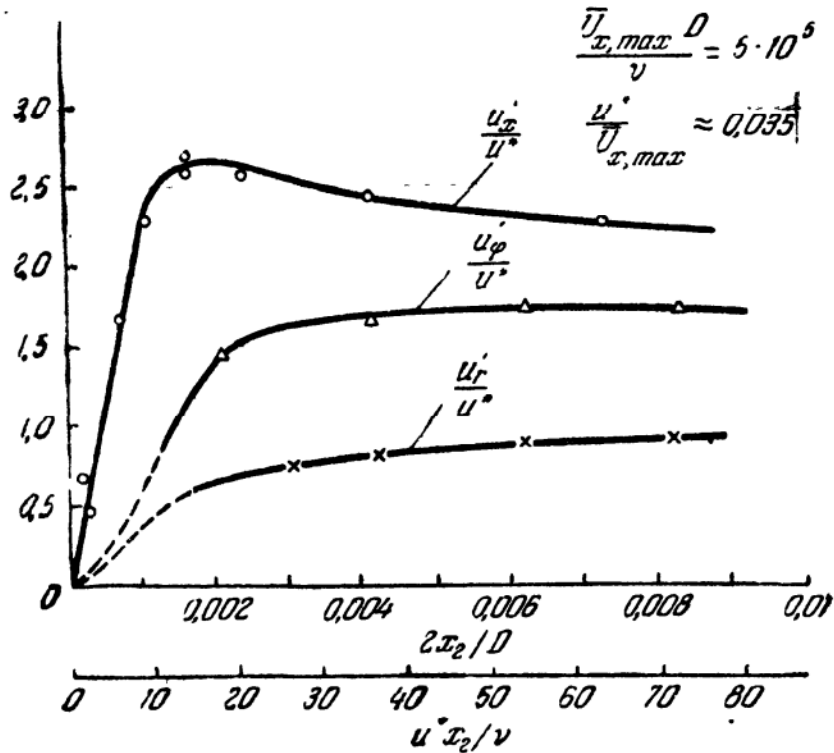


Рис. 7.34. Относительная интенсивность турбулентности вблизи стенки при течении в трубе [41].

По данным Лауфера о величинах $u'_x/\bar{U}_x, \max$, $u'_r/\bar{U}_x, \max$ и $u'_\varphi/\bar{U}_x, \max$ была вычислена кинетическая энергия турбулентности q^2/u^{*2} ; ее распределение в поперечном сечении трубы изображено на рис. 7.36, где приводится также распределение турбулентного напряжения сдвига — $\overline{u_x u_r}/u^{*2}$, измеренное Лауфером. Следует обратить внимание на близкое сходство их с соответствующими результатами для течения в пограничном слое, изображенными на рис. 7.19, где кривые содержат поправку на перемежаемость. Таким образом, если учесть влияние перемежаемости течения в пограничном слое вблизи внешней границы, то станет ясно, что между крупномасштабными движениями при течении в трубе и в полностью турбулентной области пограничного слоя существует тесное сходство. Именно с этими движениями и связаны в основном кинетическая энергия турбулентности и турбулентное напряжение сдвига. Следовательно, аналогичный результат получится и для отношения $-\overline{u_x u_r}/q^2$, которое

для случая течения в трубе показано на рис. 7.37, а для течения в пограничном слое — на рис. 7.15.

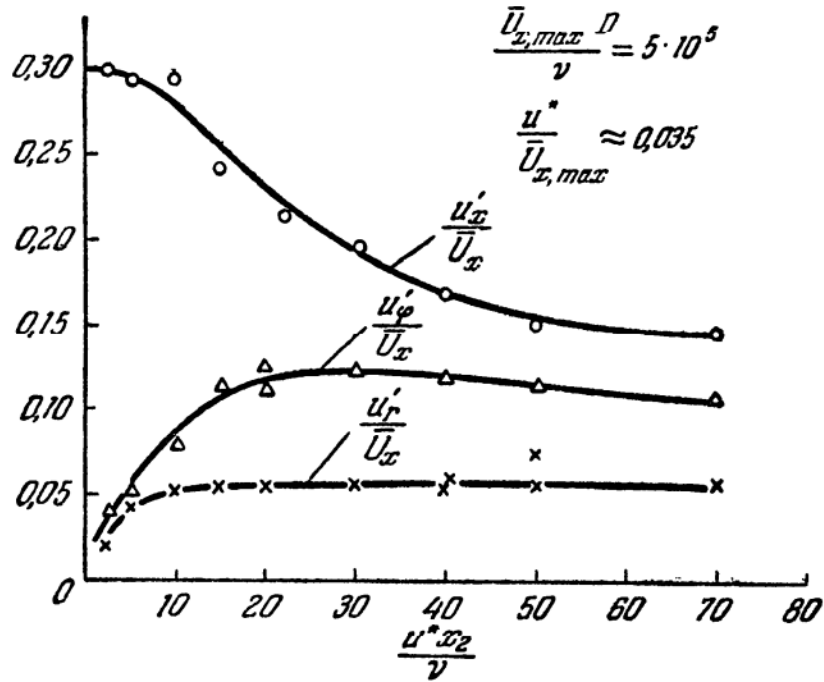


Рис. 7.35. Распределение интенсивности турбулентности, отнесенной к местной осредненной скорости, вблизи стенки при тчении в трубе [41].

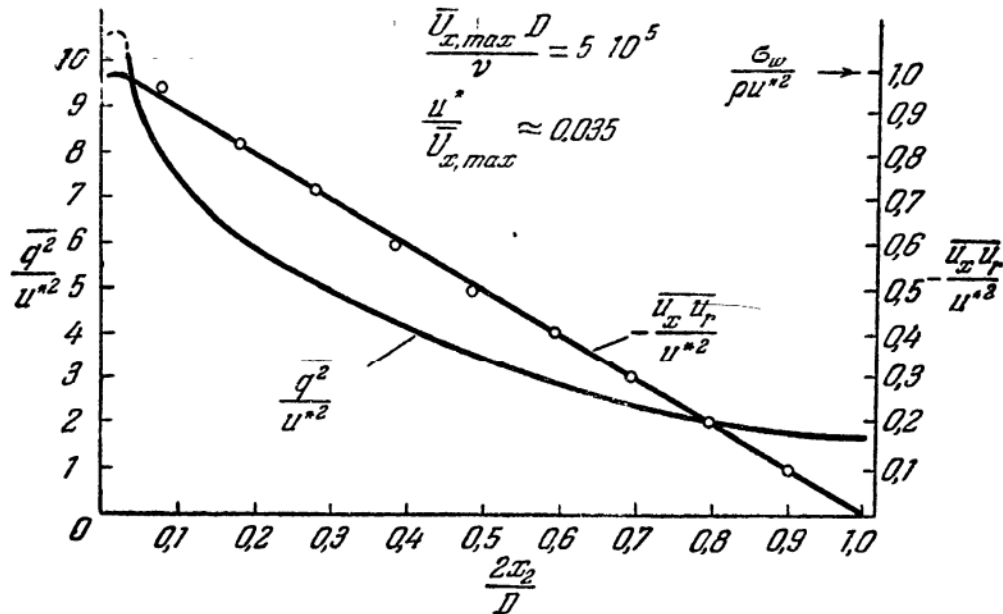


Рис. 7.36. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига при тчении в трубе [41].

Распределение турбулентного напряжения сдвига в пристеночной области при тчении в трубе показано на рис. 7.38. Из сравнения этого рисунка с рис. 7.14 для тчения в пограничном слое можно сделать

вывод о качественном и количественном совпадении между двумя этими кривыми.

По распределениям осредненной скорости и турбулентного напряжения сдвига был вычислен коэффициент вихревой вязкости $(\epsilon_m)_{xx}$.

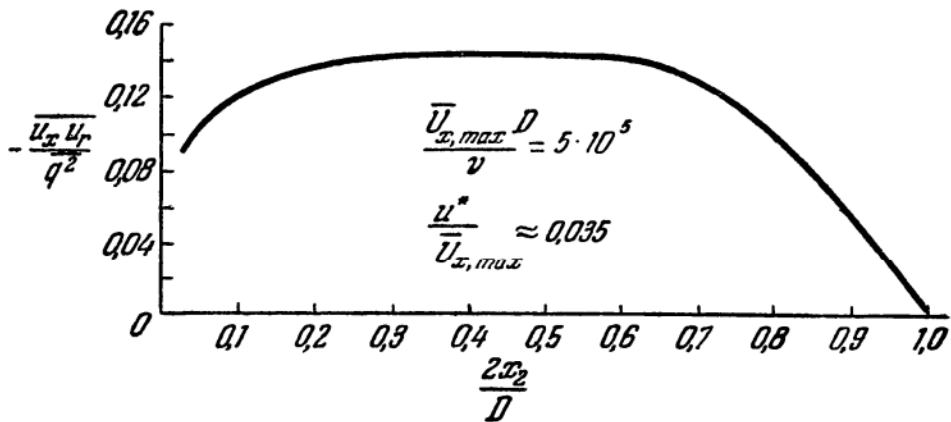


Рис. 7.37. Распределение отношения турбулентного напряжения трения к кинетической энергии турбулентности при течении в трубе [41].

Турбулентное напряжение сдвига, за исключением области вблизи стенки, где существенную роль приобретают вязкие напряжения сдвига, практически равно полному напряжению сдвига, распределение

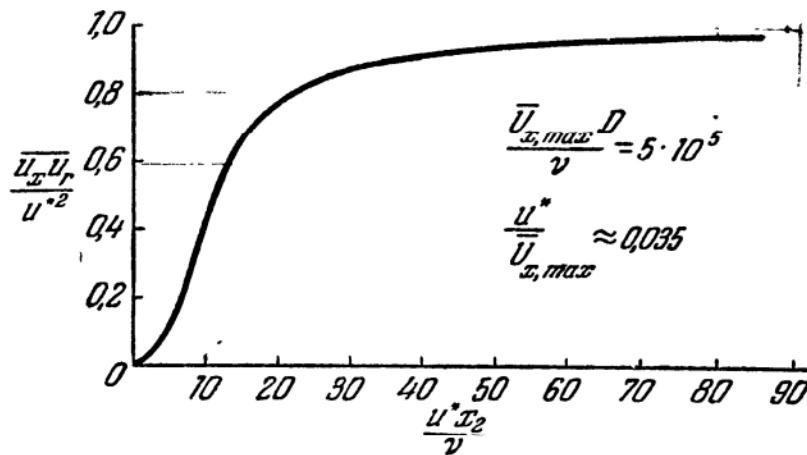


Рис. 7.38. Распределение турбулентного напряжения сдвига вблизи стенки при течении в трубе [41].

которого, согласно уравнению (7.94), подчиняется линейному закону. Из этого уравнения получаем

$$\frac{2(\epsilon_m)_{xx}}{\bar{U}_{x, \max} D} = \frac{u^{*2}}{\bar{U}_{x, \max}^2} \frac{1 - \xi_2}{\frac{d}{d\xi_2} \left(\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x, \max}} \right)}. \quad (7.101)$$

В пристеночной области, где турбулентное напряжение сдвига вблизи стенки составляет лишь часть полного напряжения сдвига,

коэффициент вихревой вязкости может быть получен непосредственно из распределения напряжения сдвига. Тогда вместо соотношения (7.101) следует использовать формулу

$$\frac{2(\epsilon_m)_{xx}}{u^*D} = \frac{\bar{U}_{x, \max}}{u^*} \frac{2\nu}{\bar{U}_{x, \max}D} \frac{-\overline{u_x u_r}/u^{*2}}{\frac{d}{dx_2^+} \left(\frac{\bar{U}_x}{u^*} \right)}, \quad (7.102)$$

где $x_2^+ = u^* x_2 / \nu$.

Вычисленные описанным способом коэффициенты вихревой вязкости представлены на рис. 7.39 — для области ядра — и на рис. 7.40 — для пристеночной области. Для области ядра при этом были использованы не только данные Лауфера о распределении осредненной

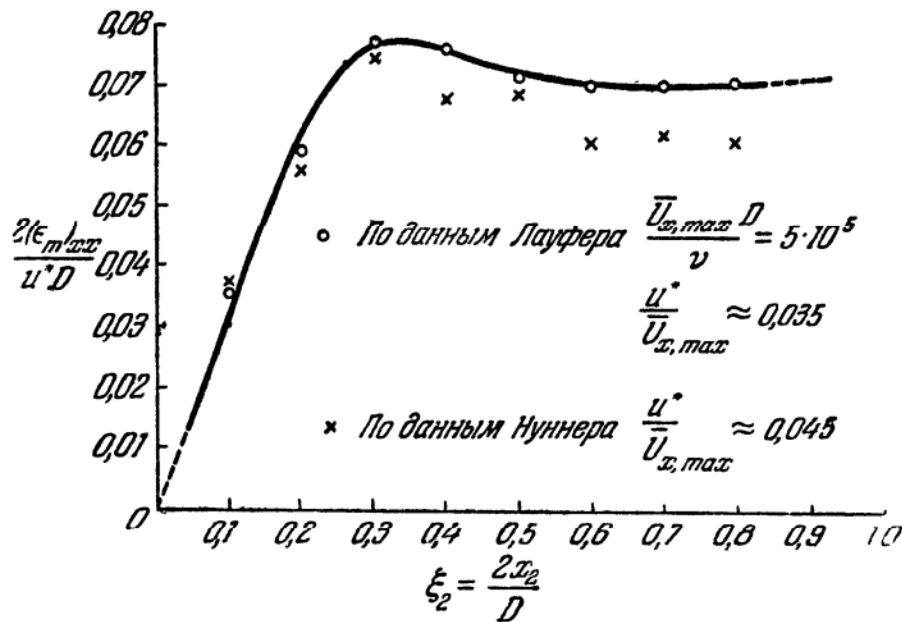


Рис. 7.39. Распределение коэффициента вихревой вязкости при течении в трубе, вычисленное по данным Лауфера [41] и Нуннера [42].

скорости, но также и данные Нуннера [42], в опытах которого динамическая скорость составляла $u^*/\bar{U}_{x, \max} \approx 0,045$.

Для области ядра течения в трубе распределение коэффициента вихревой вязкости имеет как качественное, так и количественное сходство с соответствующим распределением для внешней области течения в пограничном слое, если, как и прежде, рассматривать лишь полностью турбулентную зону (см. рис. 7.19). Коэффициент вихревой вязкости вначале линейно возрастает с увеличением $\xi_2 = 2x_2/D$, затем достигает максимума вблизи $\xi_2 = 0,3$, а после этого несколько убывает и при $\xi_2 = 0,5$ достигает приблизительно постоянного значения. Такого же вида кривая была получена Рейхардтом [12] для двумерного течения в канале, хотя в этом случае максимум наблюдался в диапазоне $0,4 < \xi_2 < 0,5$.

Для пристеночной области величины $2(\epsilon_m)_{xx}/u^*D$ при течении в трубе значительно меньше, чем $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ для пограничного слоя.

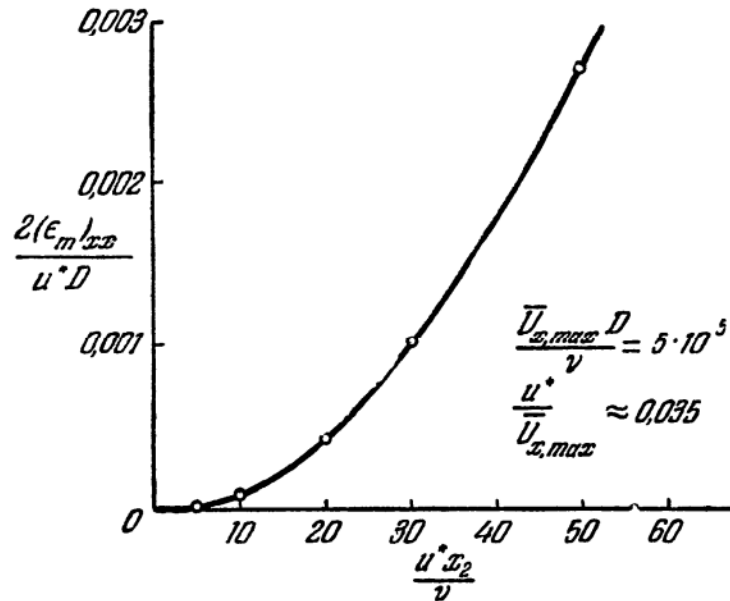


Рис. 7.40. Распределение коэффициента вихревой вязкости вблизи стенки при течении в трубе [41].

Значит, ни $D/2$, ни δ не могут служить в качестве масштаба длины для пристеночной области. Поскольку течение здесь определяется

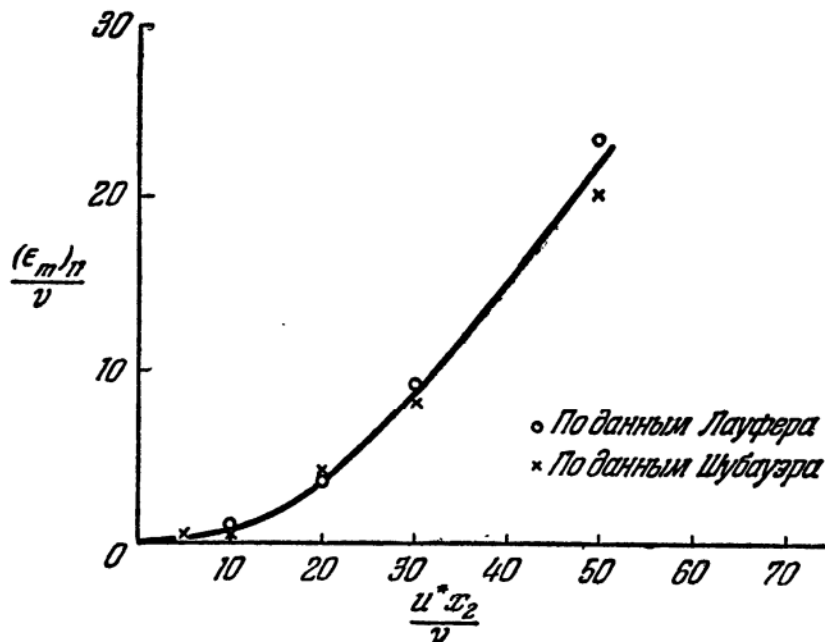


Рис. 7.41. Коэффициент вихревой вязкости в пристеночной области потока в трубе (по Лауферу [41]) и в пограничном слое (по Шубауэру [30]).

только величинами u^* и ν , то масштабом длины, который следует использовать, должно являться отношение ν/u^* . Если воспользоваться

этим масштабом длины, то вместо величины $2(\epsilon_m)_{xx}/u^*D$ или $(\epsilon_m)_{11}/u^*\delta$ надлежит рассматривать $(\epsilon_m)_{11}/\nu$. Распределение величины $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ как для течения в трубе, так и для течения в пограничном слое изображено на рис. 7.41. Изменение $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ в зависимости от $x_2^+ = u^*x_2/\nu$ может быть аппроксимировано степенным законом, а именно: $(\epsilon_m)_{11}/\nu = (x_2^+)^n$, где $n \approx 2,1$. Это значение n ниже найденной теоретически величины, равной или большей 3. Поэтому к полученному здесь эмпирическому значению следует относиться с осторожностью, особенно если учесть низкую точность измерений в зоне, очень близкой к стенке.

Исходя из приближенного соотношения (7.21) для ϵ' , Лауфер оценил диссипацию под действием турбулентности. Для этого он измерил величины $\overline{(\partial u_x/\partial x)^2}$, $\overline{(\partial u_r/\partial x)^2}$ и $\overline{(\partial u_\varphi/\partial x)^2}$, приняв $\partial/\partial x \approx \approx -\bar{U}_x^{-1}\partial/\partial t$, что приближенно справедливо для потока с поперечным сдвигом, лишь если $(u_x/\bar{U}_x)^2 \ll 1$ (см. § 1.8). Измерить величины $\overline{(\partial u_r/\partial r)^2}$, $\overline{(\partial u_\varphi/\partial r)^2}$, $\overline{(\partial u_r/r \partial \varphi)^2}$ и $\overline{(\partial u_\varphi/r \partial \varphi)^2}$ не представлялось возможным; но, как и Клебанов при исследовании пограничного слоя, Лауфер ввел предположение о достаточной степени локальной изотропности. Соотношения изотропности имеют вид

$$\overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2}$$

и

$$\overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_x}{r \partial \varphi}\right)^2}.$$

Поддающиеся измерению величины свидетельствуют о наличии приемлемой степени изотропности, за исключением области, близкой к стенке. При сделанных выше допущениях соотношение (7.21) принимает вид

$$\epsilon' = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}\right)^2} + \frac{5}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2} + \frac{5}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_x}{r \partial \varphi}\right)^2} \right].$$

Эта турбулентная диссипация, приведенная к безразмерной форме с помощью величин u^* и $D/2$, изображена на рис. 7.42 при значениях $\bar{U}_{x, \max} D/\nu = 5 \cdot 10^4$ и $5 \cdot 10^5$. При более высоком числе Рейнольдса измерение отдельных составляющих турбулентной диссипации было чрезвычайно трудным. Полученные при этом значения представляются слишком низкими, поскольку вклад той части спектра турбулентности, которая соответствует высоким значениям волновых чисел, мог измеряться лишь с большой ошибкой и наверняка был занижен. Поэтому оценка диссипации проводилась в этом случае по результатам, полученным при более низком значении числа Рейнольдса

в предположении о том, что в области, близкой к стенке, (1) существует подобие, если в качестве масштабов скорости и длины выбраны соответственно u^* и ν/u^* , и (2) ошибка, выраженная в процентах, одинакова по всему поперечному сечению трубы. Вычисленная таким способом диссипация при более высоком числе Рейнольдса представлена на рис. 7.42 пунктирной линией. Распределение диссипации в рассматриваемом случае очень сходно с распределением диссипации в пограничном слое (рис. 7.20) и, подобно ему, полностью отличается от распределения диссипации в свободном турбулентном потоке, для которого характерна высокая степень однородности в поперечном

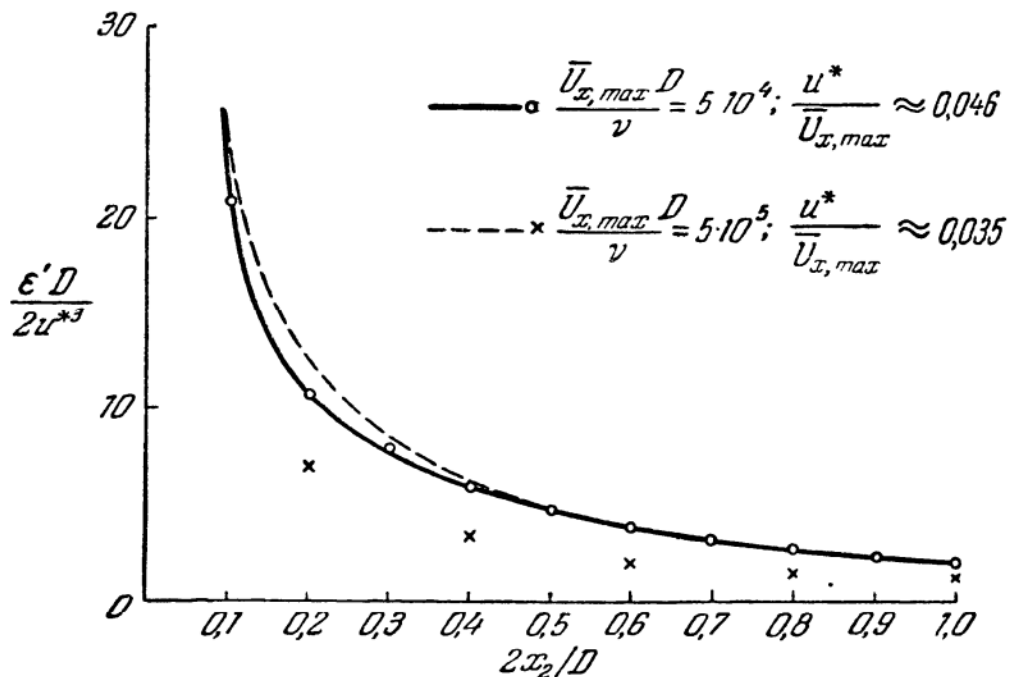


Рис. 7.42. Турбулентная диссипация при течении в трубе [41].

сечении области турбулентного течения. Это указывает на тот факт, что мелкомасштабная структура пристеночной турбулентности значительно менее однородна, нежели мелкомасштабная структура свободной турбулентности.

Пользуясь методом термоанемометра, впервые предложенным и примененным для этой цели Таунсендом (см. § 2.4), Лауфер измерил тройные корреляции скорости $\overline{u_r^3}$, $\overline{u_x^2 u_r}$ и $\overline{u_\varphi^2 u_r}$. Таким образом, ему удалось определить распределение величины $u_r q^2$. Благодаря этому по известным распределениям осредненной скорости, турбулентного напряжения сдвига, кинетической энергии турбулентности и диссипации оказалось возможным составить баланс турбулентной энергии, ибо единственным неизвестным слагаемым в этом балансе оставалось распределение диффузии энергии давления $\overline{u_r p}$, которую и можно было считать величиной, замыкающей баланс.

Как отмечалось в § 7.2, полное уравнение баланса энергии турбулентности может быть в той или иной степени упрощено, в зависимости от того, какую область течения в трубе мы рассматриваем. Если рассматривать ту часть пристеночной области, которая расположена наиболее близко к стенке, то можно пользоваться уравнением (7.5а). Выбирая в качестве масштабов скорости и длины

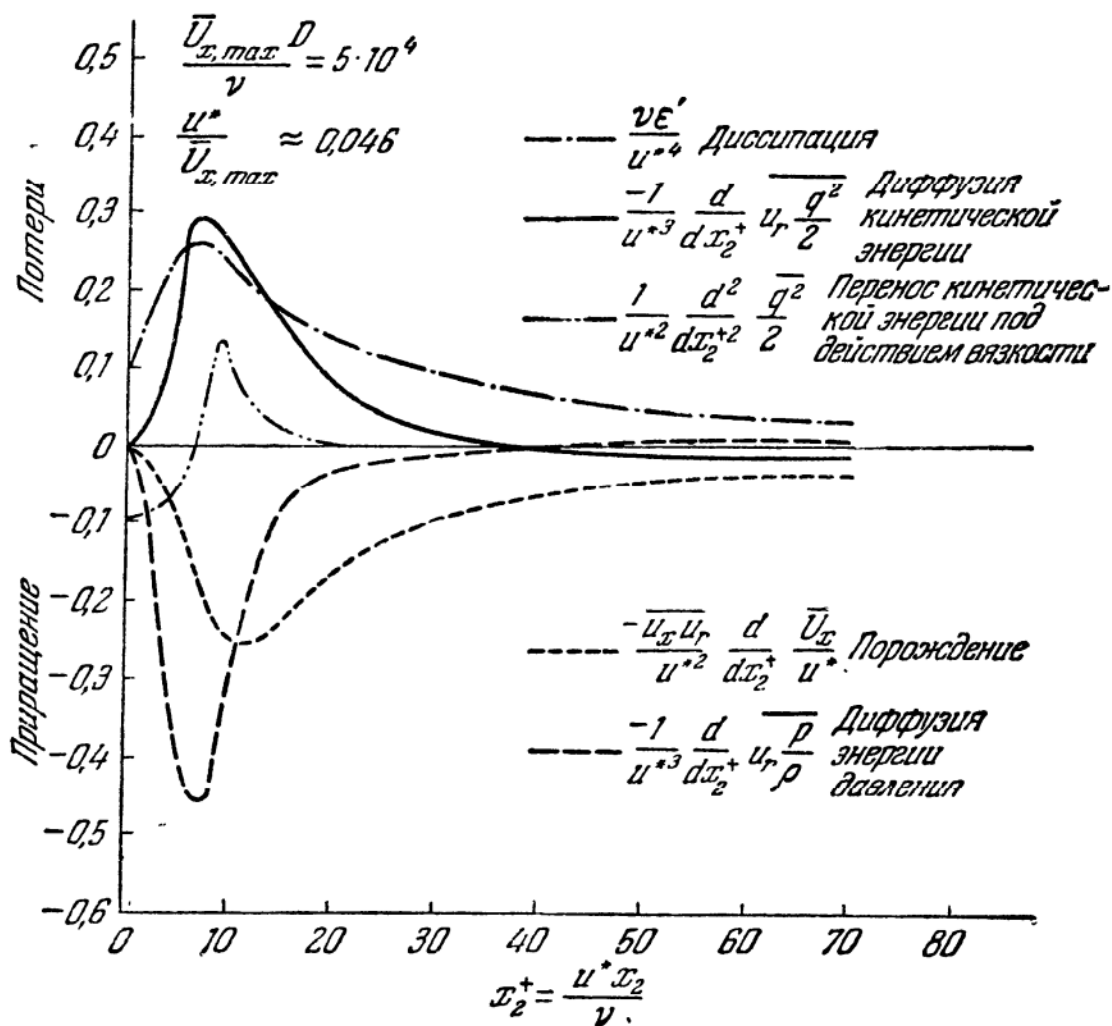


Рис. 7.43. Баланс энергии в пристеночной области потока в трубе [41].

соответственно величины u^* и ν/u^* , можно преобразовать уравнение (7.5б) для течения в трубе к следующей безразмерной форме:

$$\frac{\bar{u}_x \bar{u}_r}{u^{*2}} \frac{d}{dx_2^+} \left(\frac{\bar{U}_x}{u^*} \right) + \frac{1}{u^{*3}} \frac{d}{dx_2^+} \bar{u}_r \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right) = \frac{\nu \varepsilon'}{u^*} - \frac{d^2}{dx_2^{+2}} \frac{\bar{q}^2}{2u^{*2}}.$$

Здесь знаки перед некоторыми членами отличаются от знаков в уравнении (7.5б) в силу того, что положительные направления скорости u_r и оси x_2 противоположны.

На рис. 7.43 представлен баланс энергии в пристеночной области, измеренный Лауфером и скорректированный Таунсендом [31], который

обратил внимание на то, что Лауфер при оценке диссипации не учел влияния ее больших градиентов вблизи стенки.

В области, наиболее близкой к стенке, все члены, входящие в приведенное выше уравнение, являются существенными. Можно заметить, что члены, характеризующие диссипацию и порождение энергии, почти равны по величине, но противоположны по знаку; то же самое можно

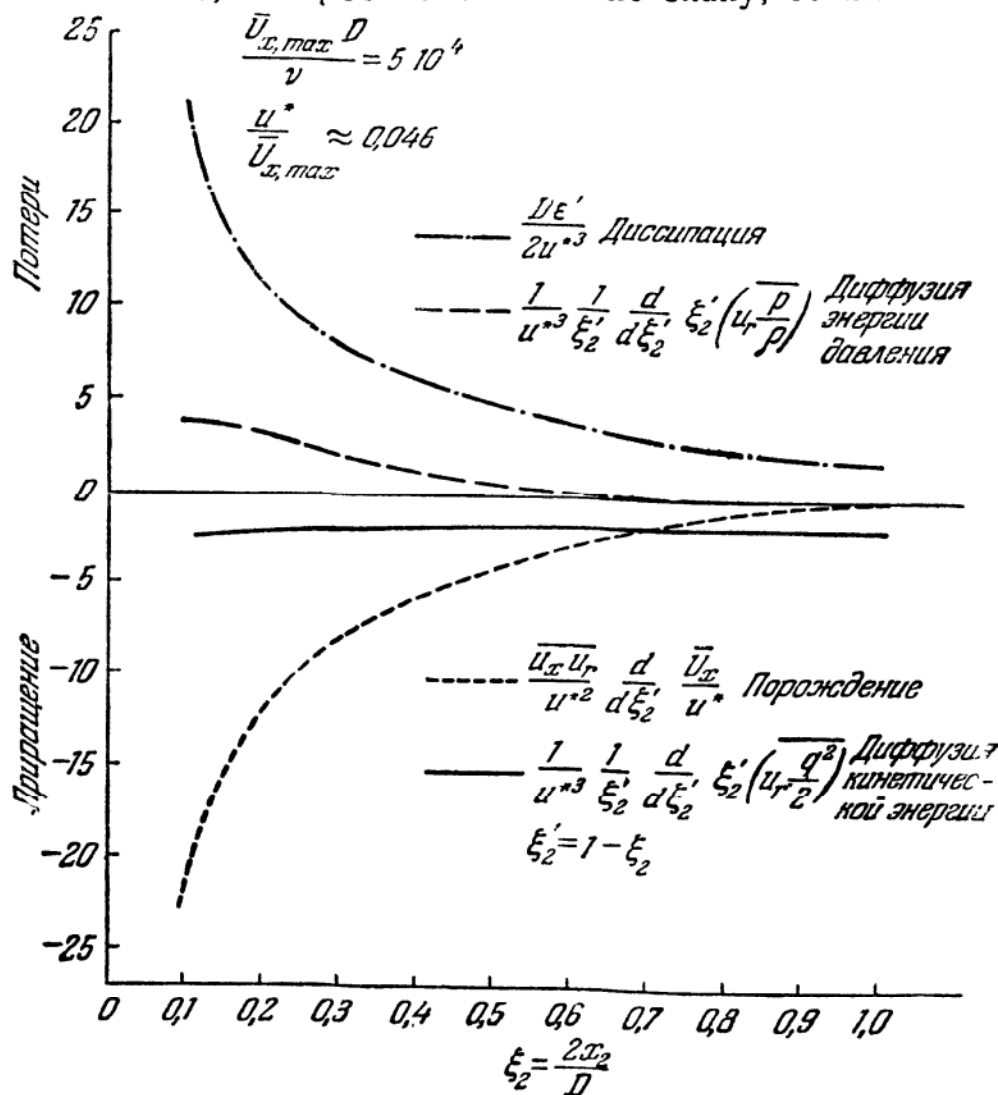


Рис. 7.44. Баланс энергии в ядре потока в трубе [41].

сказать и о слагаемых, представляющих турбулентную диффузию кинетической энергии и энергии давления.

В области, расположенной дальше от стенки, основной вклад в баланс энергии приходится на долю порождения и диссипации энергии. Поэтому для данной области удовлетворяется более простое уравнение (7.6), хотя здесь и наблюдается незначительный перенос энергии за счет турбулентной диффузии. Как ясно показывает рис. 7.44, на котором представлен баланс энергии для области ядра, рассматриваемая область занимает значительную часть полного поперечного сечения трубы.

Для области ядра, по-видимому, более подходящим является уравнение (7.20). Используя u^* и $D/2$ в качестве соответствующих масштабов скорости и длины, можно преобразовать уравнение (7.20) к безразмерной форме:

$$\frac{\overline{u_x u_r}}{u^{*2}} \frac{d}{d\xi_2'} \left(\frac{\overline{U_x}}{u^*} \right) + \frac{1}{u^{*3}} \frac{1}{\xi_2'} \frac{d}{d\xi_2'} \left\{ \xi_2' \left[\overline{u_r \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} \right] \right\} + \frac{\varepsilon' D}{2u^{*3}} = 0,$$

где $\xi_2' = 1 - \xi_2 = \frac{2r}{D}$.

В этой области, скажем, при $\xi_2 < 0,2$, определенный, хотя и относительно небольшой, вклад приходится на долю турбулентной диффузии кинетической энергии и энергии давления. В то время как турбулентная диффузия энергии давления уменьшается и в центральной области ($\xi_2 > 0,6$) становится пренебрежимо малой, роль турбулентной диффузии кинетической энергии с увеличением ξ_2 все более возрастает. В области, близкой к оси трубы, диссипация энергии уравнивается единственно лишь турбулентной диффузией кинетической энергии.

Насколько можно судить по рис. 7.43 и 7.44, благодаря турбулентной диффузии, в направлении от стенки к центру трубы существует непрерывный поток кинетической энергии турбулентности. При этом в переходной области ($x_2^+ < 30$) наблюдаются потери кинетической энергии, а снаружи этой области и в области ядра имеется прирост энергии. Аналогично по направлению к стенке, в области $\xi_2 < 0,5$, существует, по-видимому, поток энергии давления, который сопровождается приростом энергии в переходной области и потерями снаружи этой области. Можно заметить, что перенос энергии в последнем случае направлен против градиента кинетической энергии турбулентности (ср. рис. 7.36).

Спектры энергии компонент турбулентных пульсаций скорости u_x и u_r , измеренные Лауфером в различных точках поперечного сечения потока в трубе, уже были показаны на рис. 4.3 и 4.4. Помимо того, что говорилось об этих спектрах в главе 4, можно отметить, что в диапазоне наиболее низких волновых чисел энергия компоненты u_x во всех точках значительно больше энергии компоненты u_r , в то время как в диапазоне высоких волновых чисел наблюдается противоположная тенденция. Это различие энергетических спектров ясно видно на рис. 7.45 и 7.46, на которых указанные спектры изображены вместе с энергетическим спектром компоненты u_φ соответственно для точек $2x_2/D = 1$ и $2x_2/D = 0,074$.

В центре трубы спектры $E_2(k_1)$ и $E_3(k_1)$ компонент u_r и u_φ одинаковы (при измерениях никакой разницы обнаружить не удалось). Однако в пристеночной области, как показывают спектры (рис. 7.46), снятые при $2x_2/D = 0,074$ ($u^* x_2/\nu \approx 650$), дело обстоит иначе. Раз-

личия между этими спектрами в диапазоне малых волновых чисел соответствуют различиям, наблюдавшимся в случае интенсивностей u'_x , u'_r и u'_φ . Согласно кривым распределения, изображенным на рис. 7.32, в центре трубы $u'_r \approx u'_\varphi$, а величина u'_x больше, чем u'_r и u'_φ , в то время как в пристеночной области $u'_x > u'_\varphi > u'_r$.

Лауфер не проводил измерений пространственных корреляций компонент турбулентных пульсаций скорости для течения в трубе;

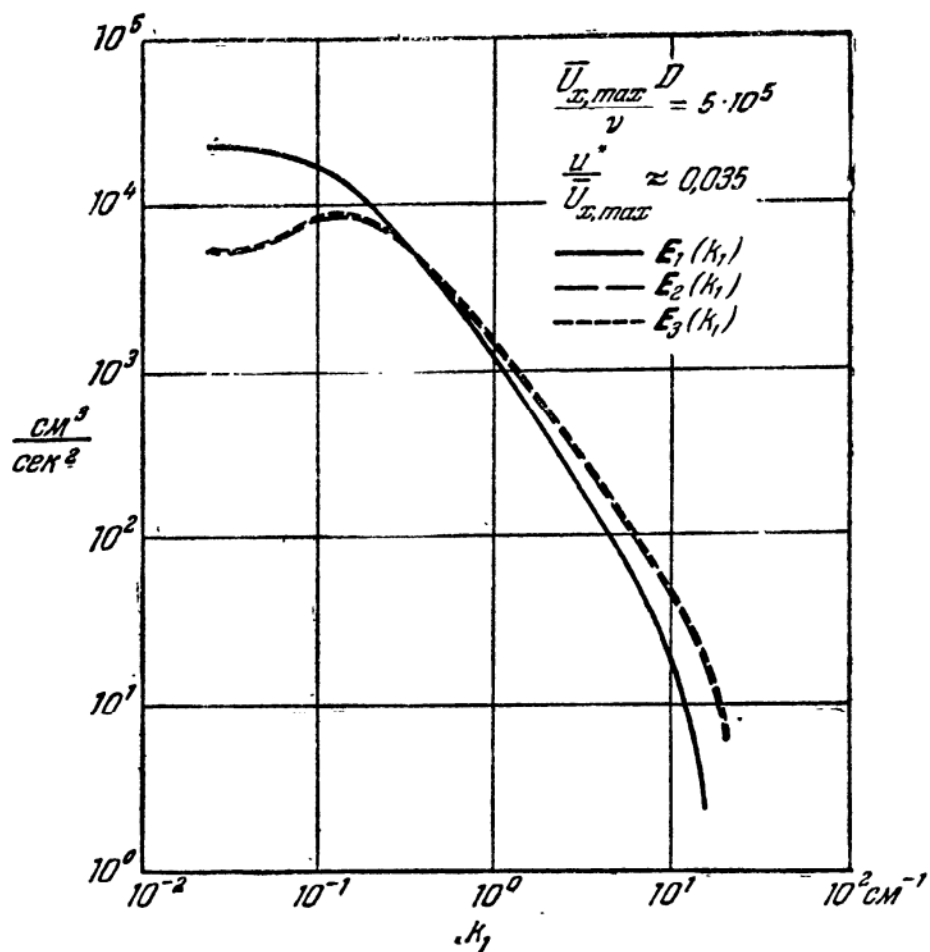


Рис. 7.45. Энергетические спектры на оси потока в трубе ($2x_2/D = 1$) [41].

однако подобные измерения были осуществлены им в двумерном канале [43]. Из результатов этих измерений следует, что продольная корреляция в осевом направлении $u_1(\xi_1) u_1(\xi_1 + x_1)$ простирается на значительно большие расстояния, нежели поперечные корреляции $u_1(\xi_2) u_1(\xi_2 + x_2)$ и $u_1(\xi_3) u_1(\xi_3 + x_3)$ (координата x_2 отсчитывается по перпендикуляру к стенке). Интегральный масштаб Λ_f в направлении оси x_1 оказался приблизительно в 0,8 раза меньше полуширины канала; интегральные масштабы Λ_g в направлении осей x_2 и x_3 были примерно равны друг другу и составляли 0,2 ÷ 0,3 от полуширины канала. Изменение этих интегральных масштабов в поперечном

сечении области ядра было невелико. Но в то же время соответствующие масштабы диссипации λ_f и λ_g , как оказалось, возрастают с увеличением расстояния от стенки, а их максимальные значения составляют около 0,1 от полуширины канала. Очевидно, турбулентность в области ядра была образована в данном случае крупными вихрями, вытянутыми в осевом направлении. Аналогичные результаты в отношении

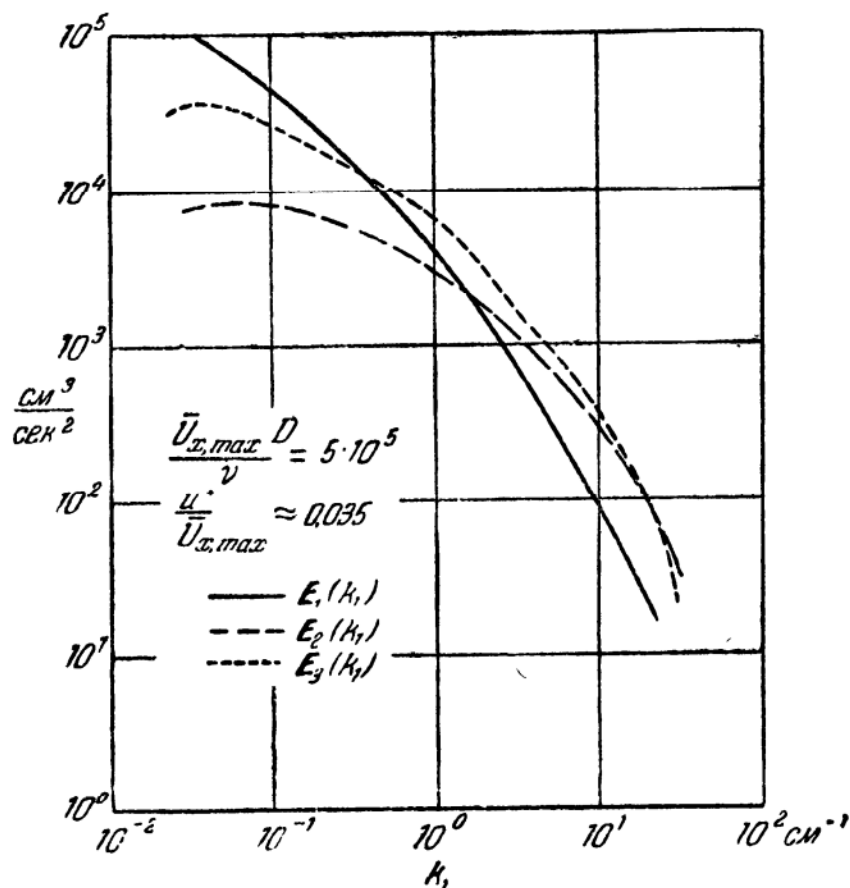


Рис. 7.46. Энергетические спектры потока в трубе при $2x_2/D = 0,074$ ($u^*x_2/\nu \approx 650$) [41].

величины интегрального и диссипативного масштабов получаются и из анализа измерений Лауфера, относящихся к кинетической энергии и диссипации при течении в трубе, если для их оценки воспользоваться соотношениями (3.105) и (3.96), приведенными в главе 3 (Таунсенд [31]; длина l_e порядка величины интегрального масштаба).

§ 7.10. Структура турбулентного потока в трубе

На основании фактов, изложенных в предыдущем параграфе, можно представить определенную картину структуры турбулентного потока в трубе. До некоторой степени эта картина применима также и к турбулентному пограничному слою, так как, согласно экспериментальным данным, между течением в трубе и течением в пограничном слое существует тесное сходство. Степень этого сходства возрастает по

мере приближения к стенке. В пристеночной области никакой разницы между течением в трубе и в пограничном слое не существует. Одна из причин такого положения, когда подобие в более удаленных от стенки областях ослабевает, состоит в том, что при течении в пограничном слое в осевом и поперечном направлениях происходит конвективный перенос, обусловленный осредненным движением, в то время как при турбулентном течении в трубе его не наблюдается. Это становится очевидным, если сравнивать балансы энергии турбулентности для обоих течений (ср., например, рис. 7.21 и 7.44). Другой причиной является то, что при течении в трубе поток не имеет перемежающегося характера, подобного тому, который наблюдается во внешней области пограничного слоя, где существует взаимодействие с невозмущенным нетурбулентным свободным потоком.

Наиболее существенные факты относительно течения в трубе вкратце сводятся к следующему.

Порождение и диссипация кинетической энергии турбулентности имеют резко выраженный максимум в переходном слое вблизи стенки.

В большей части поперечного сечения трубы основной вклад в баланс энергии турбулентности приходится на долю порождения и диссипации и, больше того, обе эти величины приблизительно одинаковы, так что турбулентность практически находится в состоянии энергетического равновесия.

Благодаря турбулентной диффузии имеется поток кинетической энергии в направлении ее градиента, к центру трубы, которым обусловлены потери энергии в пристеночной области; это — единственный источник энергии в центральной области трубы, компенсирующий потери из-за диссипации. В то же время переходный слой получает энергию вследствие турбулентной диффузии энергии давления, направленной из области ядра к стенке.

Эти процессы схематически показаны на рис. 7.47.

В центре трубы наблюдается некоторая анизотропность, проявляющаяся в том, что $u'_x > u'_r$, но $u'_r \approx u'_\varphi$; степень анизотропности возрастает по направлению к пристеночной области, где $u'_x > u'_\varphi > u'_r$. В пристеночной области порождение энергии турбулентности при $u^* x_2/\nu \approx 12$ достигает максимума. В этой точке величина u'_r очень мала, в то время как величина u'_x является большой и при этом достигает максимального значения (см. рис. 7.34). Таким образом, порождение кинетической энергии турбулентности за счет поперечного сдвига в осредненном течении приходится главным образом на долю компоненты u'_x . Наибольшая часть этой энергии непосредственно сразу же диссипируется, а некоторая часть переносится от стенки к более удаленным от нее областям. Согласно Таунсенду [31], это явление можно объяснить, если принять предположение о том, что турбулентность вблизи стенки образована частично мелкими присоединенными

вихрями, имеющими фиксированную ориентацию, а частично — отошедшими свободными вихрями, которые под действием турбулентности диффундируют по направлению к внутренним областям сечения трубы, благодаря чему происходит перенос их кинетической энергии, сопровождаемый одновременно затуханием и диссипацией энергии.

Энергетический спектр осевой компоненты турбулентных пульсаций скорости, измеренный Лауфером в переходном слое (см., например, рис. 4.3), свидетельствует не только о сильном взаимодействии

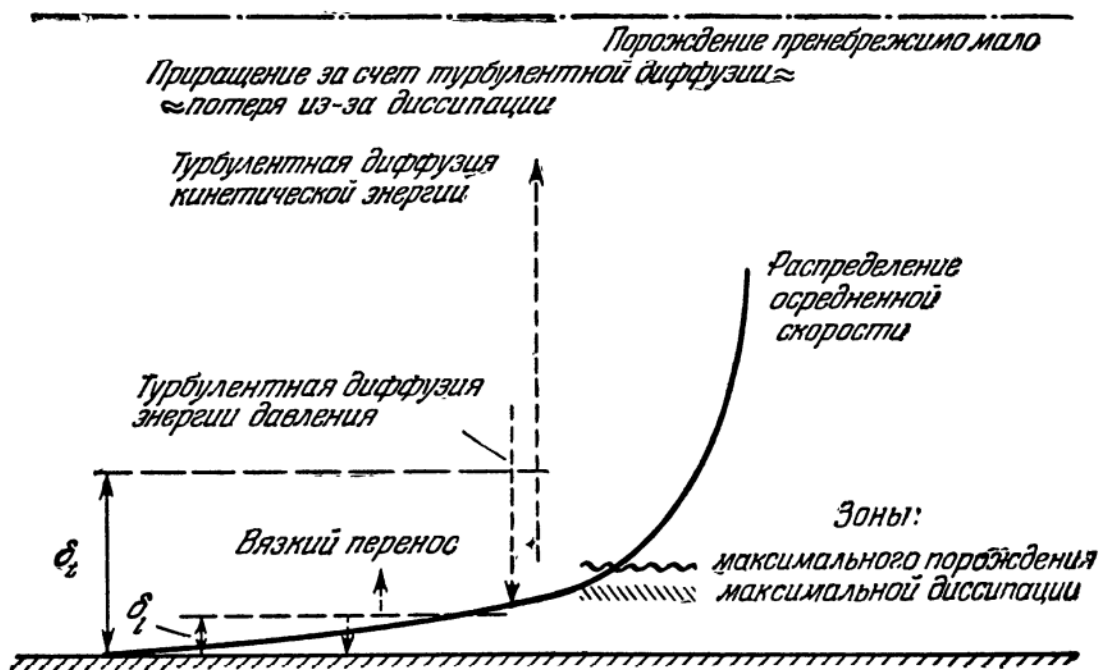


Рис. 7.47. Процессы, происходящие при установлении баланса энергии турбулентности при течении в трубе.

с осредненным движением, но также и о том, что по мере приближения к стенке диапазон волновых чисел расширяется в сторону больших значений. Энергетический спектр, измеренный в центре трубы, характеризуется значительно более ограниченным диапазоном волновых чисел. С подобными результатами согласуется постепенное возрастание масштаба диссипации с увеличением расстояния от стенки, указывающее на то, что размер вихрей в пристеночной области становится все меньше и меньше.

В то же время приблизительное постоянство и сама величина интегрального масштаба в области ядра течения в трубе указывают на то, что в этой области существуют крупные вихри, вытянутые в осевом направлении, причем их поперечные размеры составляют примерно от $1/4$ до $1/2$ радиуса трубы, а их осредненные скорости лежат в осевом направлении. На эти крупные вихри наложены более мелкие вихри, и по энергетическим спектрам, снятым в различных точках потока в трубе, а также по распределению масштабов дисси-

пации можно сделать вывод, что эти крупные вихри вблизи пристеночной части состоят из более мелких вихрей, нежели в центральной области трубы. Очевидно, через посредство крупных вихрей осуществляется (по всей вероятности, частично) перенос и диффузия мелких, богатых энергией вихрей от пристеночной области к центру. Но в то же время эти вихри должны способствовать возвращению бедных энергией жидких молей обратно к стенке, где эти моли под действием поперечного сдвига со стороны осредненного движения снова превращаются в мелкие вихри высокой интенсивности. Подобная картина турбулентного движения изображена на рис. 7.48; эту

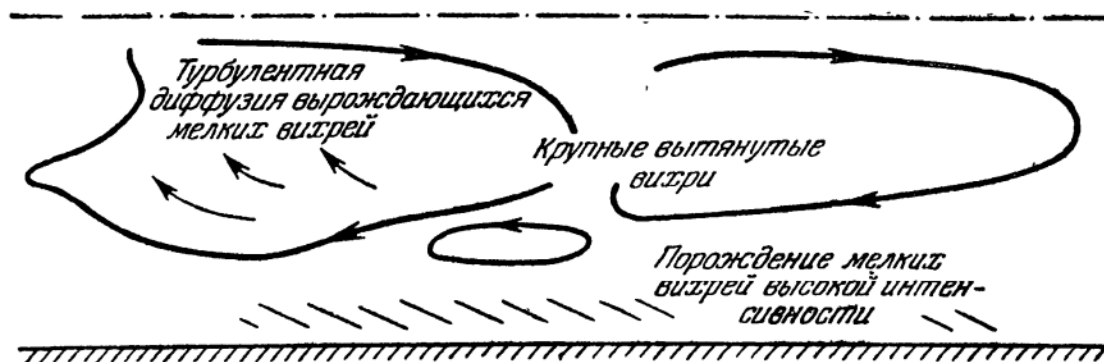


Рис. 7.48. Картина турбулентного движения при течении в трубе.

картину полезно сравнить с фотографиями, представленными на рис. 1.10.

Крупный размер вихрей в области ядра, вытекающее отсюда приблизительное постоянство интегрального масштаба и малое изменение интенсивности турбулентности в центральной области могут объяснить, почему коэффициент вихревой вязкости выше, скажем, $2x_2/D = 0,5$ сохраняет примерно постоянное значение. Это приблизительное постоянство коэффициента вихревой вязкости можно использовать для расчета осредненной скорости, основанного на предположении о том, что коэффициент вихревой вязкости в области ядра постоянен.

Выше было показано, что логарифмическое распределение скорости применительно к пристеночной области дает точное описание действительного распределения скорости и что его использование совместимо с предположениями о постоянстве напряжения сдвига и линейном возрастании коэффициента вихревой вязкости с расстоянием от стенки. Эти предположения оправдываются тем, что уменьшение напряжения сдвига в пристеночной области невелико, а коэффициент вихревой диффузии, согласно рис. 7.39, с увеличением $2x_2/D$ возрастает практически по линейному закону.

Каким будет распределение скорости, основанное на предположении о постоянстве коэффициента вихревой вязкости в области ядра?

Дифференциальное уравнение для распределения скорости запишется так:

$$(\epsilon_m)_{xx} \frac{d}{dx_2} \bar{U}_x = \frac{1}{\rho} \sigma_{12} = \frac{1}{\rho} \sigma_w (1 - \xi_2) = u^{*2} (1 - \xi_2)$$

или

$$\frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_{x, \max}} = \frac{u^* D}{2 (\epsilon_m)_{xx}} \frac{u^*}{\bar{U}_{x, \max}} (1 - \xi_2).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\bar{U}_{x, \max} - \bar{U}_x}{u^*} = \frac{u^* D}{4 (\epsilon_m)_{xx}} (1 - \xi_2)^2. \quad (7.103)$$

Это решение можно сравнить с распределением скорости, измеренным Лауфером при $\bar{U}_{x, \max} D/\nu = 5 \cdot 10^5$. Таким образом, следует положить, что $u^*/\bar{U}_{x, \max} \approx 0,035$, и принять постоянное значение коэффициента вихревой вязкости, равное

$$\frac{2 (\epsilon_m)_{xx}}{u^* D} = 0,07$$

(ср. с рис. 7.39). Результаты расчета приведены на рис. 7.49; совпадение между вычисленным и измеренным распределениями скорости при $\xi_2 > 0,2$ является вполне удовлетворительным.

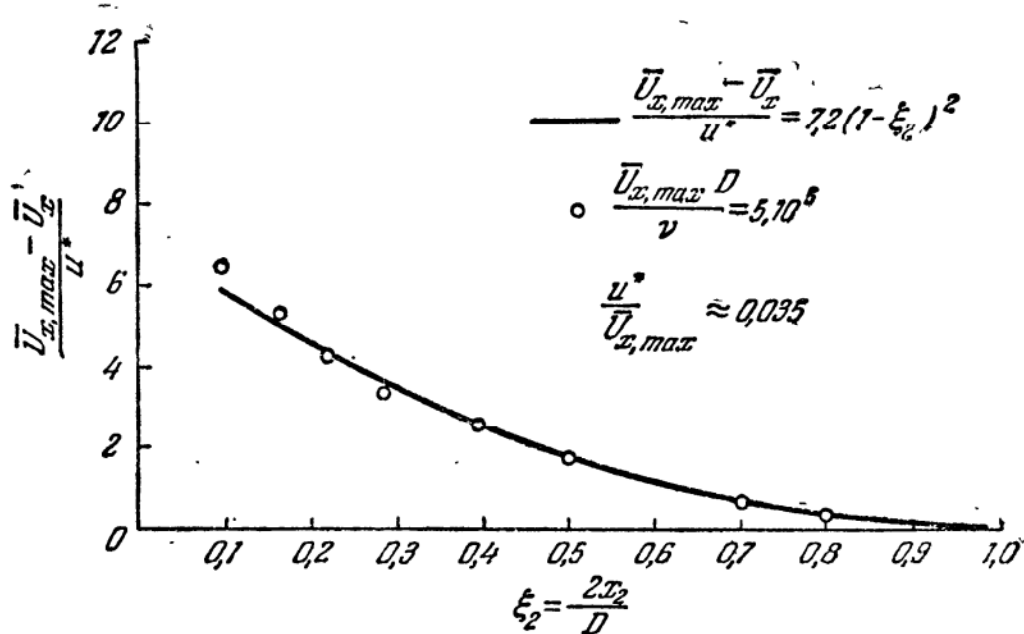


Рис. 7.49. Сравнение расчетной избыточной скорости с экспериментальными данными Лауфера [41].

Действительное распределение коэффициента вихревой вязкости можно, конечно, аппроксимировать более точно, и притом по всему поперечному сечению трубы. Рейхардт [12] аппроксимировал это распределение для исследованного им двумерного течения в канале,

воспользовавшись для этой цели четными степенями полинома четвертого порядка по $1 - \xi_2$. Полученное в результате расчета распределение скорости оказалось в замечательном согласии с измеренным распределением. Однако улучшение, достигнутое при этом по сравнению с распределением скорости, полученным на основании предположения о постоянстве коэффициента вихревой вязкости, заметно проявляется лишь в области $\xi_2 < 0,2$, где логарифмическое распределение тоже дает удовлетворительное решение.

§ 7.11. Перенос скалярной субстанции при пристеночной турбулентности

Немногочисленные экспериментальные исследования распределения скалярной субстанции при пристеночной турбулентности относятся, в основном, к переносу тепла и, кроме того, ограничены измерением распределения осредненной температуры. Так, какие-либо экспериментальные данные о характеристиках турбулентных пульсаций температуры или их корреляциях с турбулентными пульсациями скорости отсутствуют. Поэтому любые представления о механизме турбулентного переноса скалярной субстанции могут основываться лишь на предположении о некоторой аналогии между переносом скалярной субстанции и переносом импульса.

В самом деле, даже измерения распределений осредненной температуры настолько скудны, что указанной аналогией до сих пор пользуются для расчета этих распределений.

В этом параграфе мы остановимся на некоторых теориях, основанных на предположении о такого рода аналогии, и рассмотрим, в частности, вопрос о том, можно ли вычислить распределение субстанции по известному распределению осредненной скорости.

В связи с тем, что большинство проведенных измерений, как уже упоминалось, относится к распределению осредненной температуры, в последующем изложении мы ограничимся лишь рассмотрением переноса тепла.

Распределение осредненной температуры в пограничном слое воздушного потока вдоль нагретой пластины было измерено Элиасом [44], а в турбулентном потоке в трубе — Нуннером [42]. В качестве движущейся среды Нуннер тоже использовал воздух, а стенка трубы в его опытах путем нагревания ее снаружи конденсирующимся паром поддерживалась при постоянной температуре. Опыты проводились на медной трубе с внутренним диаметром 5 см, внутренняя поверхность которой могла быть искусственно сделана неровной посредством установки на разных расстояниях внутри трубы шайб различной формы и толщины.

Измерения в пограничном слое ограничивались, главным образом, внешней областью, а при течении в трубе — областью ядра.

Если для случая течения в пограничном слое распределение $(\bar{\theta}_w - \bar{\theta})/(\bar{\theta}_w - \theta_0)$, где $\bar{\theta}_w$ — осредненная температура стенки, а θ_0 — температура свободного потока, сравнить с распределением \bar{U}_1/U_0 в поперечном сечении пограничного слоя, то между двумя этими распределениями наблюдается неплохое подобие. Аналогичный результат получается и для течения в трубе, если сравнить распределения $(\bar{\theta}_w - \bar{\theta})/(\bar{\theta}_w - \bar{\theta}_{\min})$ и $\bar{U}_x/\bar{U}_{x, \max}$; здесь $\bar{\theta}_{\min}$ — осредненная температура на оси трубы. Эти результаты, видимо, оправдывают предположение об аналогии между переносом тепла и импульса. Однако

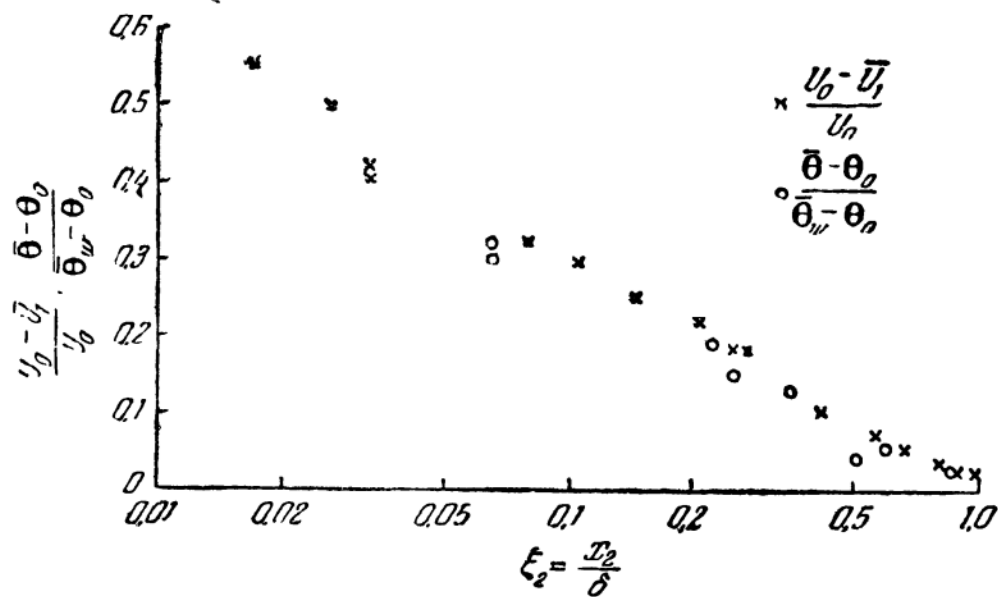


Рис. 7.50. Распределение избыточной скорости и избыточной температуры в пограничном слое на нагретой плоской гладкой пластине [44].

из-за того, что эти измерения проводились в областях, удаленных от стенки, распределение избыточной температуры целесообразнее сравнивать с распределением избыточной скорости. Кроме того, в некоторой части пристеночной области оказывается справедливым полулогарифмическое распределение скорости.

На рис. 7.50 сравниваются полученные по опытным данным Элиаса избыточная скорость $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0$ и избыточная температура $(\bar{\theta} - \theta_0)/(\bar{\theta}_w - \theta_0)$, причем оба распределения представлены в полулогарифмическом масштабе по $\xi_2 = x_2/\delta$. Аналогичное сравнение производится и на рис. 7.51, где показаны распределения избыточной скорости $(\bar{U}_{x, \max} - \bar{U}_x)/\bar{U}_{x, \max}$ и избыточной температуры $(\bar{\theta} - \bar{\theta}_{\min})/(\bar{\theta}_w - \bar{\theta}_{\min})$, полученные по опытным данным Нуннера.

Эти рисунки показывают, что по крайней мере в области, удаленной от стенки, между распределениями скорости и температуры имеется подобие, которое, однако, — а вместе с ним и аналогия

между переносом тепла и импульса — нарушается по мере приближения к стенке.

Посмотрим теперь, существует ли аналогия между переносом импульса и тепла, выражающаяся в подобии распределений осредненной скорости и осредненной температуры.

Способ решения этой задачи состоит в том, чтобы уравнение для распределения температуры выразить через распределение скорости, а затем убедиться, возможны ли физически и совместимы ли с опытными данными результаты, вытекающие из принятой аналогии, т. е. возможно ли подобие распределений скорости и температуры.

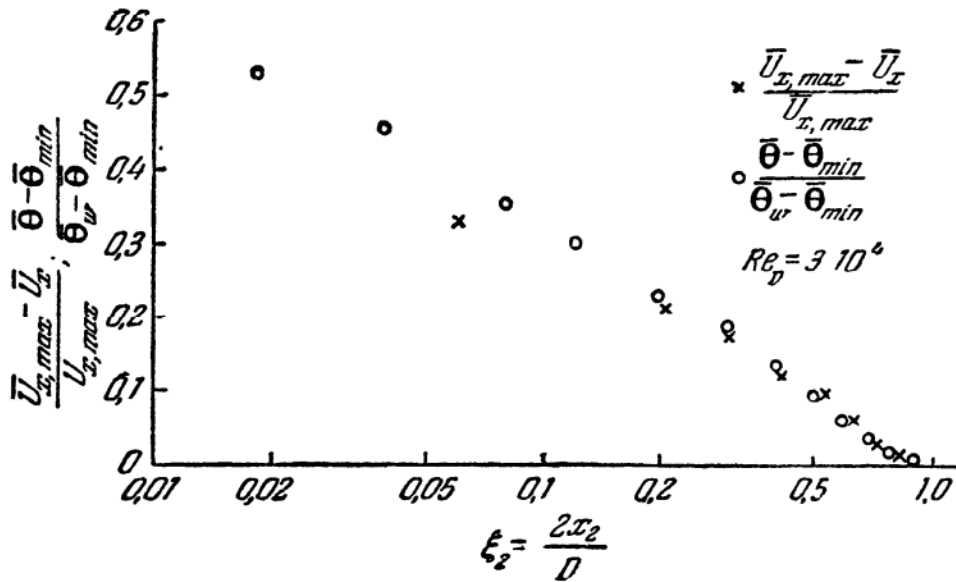


Рис. 7.51. Распределение избыточной скорости и избыточной температуры в неизоотермическом потоке в трубе [42].

При выводе уравнения для распределения температуры, выраженного через распределение скорости, предположим, что турбулентный перенос как импульса (в узком смысле этого слова), так и тепла является диффузией градиентного типа, на основании чего можно ввести соответствующие коэффициенты переноса.

Полное напряжение сдвига, представляющее собой сумму двух слагаемых, одно из которых определяется молекулярной вязкостью, а другое — вихревой вязкостью, можно записать в виде

$$\sigma_{12} = (\sigma_{12})_{\text{мол}} + (\sigma_{12})_{\text{турб}} = \mu_{\text{эфф}} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} = [\mu + \rho(\epsilon_m)] \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}. \quad (7.104)$$

Аналогично для переноса тепла \mathfrak{S}_0 на единицу площади в единицу времени через плоскость, параллельную стенке, запишем

$$\mathfrak{S}_0 = (\mathfrak{S}_0)_{\text{мол}} + (\mathfrak{S}_0)_{\text{турб}} = -\kappa_{\text{эфф}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} = -[\kappa + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}] \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2}. \quad (7.105)$$

Так как распределение температуры в рассматриваемой области неравномерно, то и распределение физических свойств движущейся жидкости тоже обладает неравномерностью. Будем считать, что коэффициент молекулярной вязкости μ , коэффициент теплопроводности κ и плотность жидкости ρ зависят от температуры. Удельная теплоемкость газа c_p , вообще говоря, изменяется с температурой весьма слабо; поэтому будем считать ее постоянной.

Из уравнения (7.105) после интегрирования получаем

$$\bar{\theta}_w - \bar{\theta} = \int_0^{x_2} \frac{\tilde{\mathfrak{T}}_{\theta}}{\kappa_{\text{эфф}}} dx_2,$$

или, в безразмерной форме,

$$\frac{\mu_w c_p (\bar{\theta}_w - \bar{\theta})}{(\tilde{\mathfrak{T}}_{\theta})_w \delta} = \int_0^{\xi_2} \frac{\tilde{\mathfrak{T}}_{\theta}}{(\tilde{\mathfrak{T}}_{\theta})_w} \frac{\mu_w}{\mu_{\text{эфф}}} \text{Pr}_{\text{эфф}} d\xi_2; \quad (7.106)$$

здесь индекс w соответствует условиям на стенке, а $\text{Pr}_{\text{эфф}}$ — эффективное число Прандтля:

$$\text{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{c_p \mu_{\text{эфф}}}{\kappa_{\text{эфф}}}. \quad (7.107)$$

Уравнение (7.106) записано для течения в пограничном слое, но его можно использовать и для течения в трубе, если толщину пограничного слоя δ заменить радиусом трубы $D/2$.

Используя величину $\mu_{\text{эфф}}$ и соотношение (7.104), эффективное число Прандтля и распределение температуры теперь можно выразить через распределение скорости; таким образом, имеем

$$\text{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{c_p}{\kappa + \rho c_p (\epsilon_{\theta})_{22}} \frac{\sigma_{12}}{\partial \bar{U}_1 / \partial x_2} = \frac{c_p}{\kappa + \rho c_p (\epsilon_{\theta})_{22}} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w \delta^+}{\frac{d}{d\xi_2} (\bar{U}_1 / u^*)},$$

где $\delta^+ = \rho_w u^* \delta / \mu_w$. Это соотношение можно дополнительно преобразовать, введя турбулентное число Прандтля

$$\text{Pr}_{\text{турб}} = \frac{(\epsilon_m)_{11}}{(\epsilon_{\theta})_{22}} \quad (7.108)$$

и выразив $(\epsilon_m)_{11}$ через распределение скорости при помощи формулы (7.104). После преобразований окончательно получаем

$$\text{Pr}_{\text{эфф}} = \frac{\text{Pr} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w}{\mu}}{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_{\text{турб}}} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \frac{\mu_w}{\mu} + \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_{\text{турб}}}\right) \frac{1}{\delta^+} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*}}. \quad (7.109)$$

Аналогично распределение температуры (7.106) можно выразить через распределение скорости. При этом получается соотношение

$$\frac{\mu_w c_p (\bar{\theta}_w - \bar{\theta})}{(\mathfrak{S}_\theta)_w \delta} = \int_0^{\xi_2} \frac{1}{\delta^+} \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \text{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.110)$$

Пользуясь этим уравнением для распределения температуры, можно вычислить полный перенос тепла через стенку к движущейся жидкости. В этом случае обычно принято вводить либо число Нуссельта, либо коэффициент c_h , характеризующий сопротивление тепловому потоку вблизи стенки.

Число Нуссельта определяется как

$$\text{Nu} = \frac{\delta}{\kappa_w (\bar{\theta}_w - \theta_0)} (\mathfrak{S}_\theta)_w. \quad (7.111)$$

Из уравнения (7.110) получим следующее выражение для **Nu**:

$$\frac{1}{\text{Nu}} = \frac{1}{\delta^+} \int_0^1 \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \frac{\text{Pr}_{\text{эфф}}}{\text{Pr}_w} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.112)$$

Определение коэффициента c_h , характеризующего сопротивление тепловому потоку, аналогично определению коэффициента трения c_f , выраженному формулой (7.48), а именно:

$$c_h = \frac{(\mathfrak{S}_\theta)_w}{c_p \rho_w U_0 (\bar{\theta}_w - \theta_0)}. \quad (7.113)$$

Этот безразмерный критерий c_h называется также числом Стантона.

Далее, из уравнения (7.110) имеем

$$\frac{1}{c_h} = \frac{U_0}{u^*} \int_0^1 \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \text{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2,$$

или, учитывая соотношение (7.49) между u^*/U_0 и c_f ,

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \int_0^1 \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \text{Pr}_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2. \quad (7.114)$$

Из определений (7.111) и (7.113) вытекает известная формула

$$\text{Nu} = \text{Re}_\delta \text{Pr}_w c_h, \quad (7.115)$$

где $\text{Re}_\delta = \rho_w U_0 \delta / \mu_w$.

Уравнение (7.110) показывает, что распределение температуры можно вычислить по распределению скорости только в том случае, когда известна зависимость величин $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$, σ_w/σ_{12} и $\text{Pr}_{\text{эфф}}$ от ξ_2 .

Кроме того, подобие между распределениями температуры и скорости может существовать, лишь если

$$\frac{\mathfrak{J}_\theta}{(\mathfrak{J}_\theta)_w} \frac{\sigma_w}{\sigma_{12}} \text{Pr}_{\text{эфф}} = \text{const.} \quad (7.116)$$

Ясно, что в общем случае это условие несправедливо, но в некоторых случаях оно приближенно выполняется.

В одной из самых ранних теорий переноса тепла в турбулентных потоках, а именно в теории Рейнольдса, просто принималось, что между переносом импульса и переносом тепла имеется полная аналогия. Следствием этого предположения является то, что условие (7.116) должно удовлетворяться. Часто полагают, что аналогия Рейнольдса определяется следующими условиями:

$$\text{Pr} = 1, \quad \text{Pr}_{\text{турб}} = 1, \quad \frac{\mathfrak{J}_\eta}{(\mathfrak{J}_\eta)_w} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w}, \quad \frac{\mu_w}{\mu} = 1, \quad \frac{\rho_w}{\rho} = 1,$$

но, как было показано, это вовсе не обязательно. Требуется, чтобы постоянная в уравнении (7.116) была равна единице. Тогда из уравнений (7.114) и (7.49) следует, что, согласно аналогии Рейнольдса,

$$c_h = \frac{1}{2} c_f. \quad (7.117)$$

Тот же результат относительно равенства $(\bar{\theta} - \theta_0)/(\bar{\theta}_w - \theta_0)$ и $(U_0 - \bar{U}_1)/U_0$ получается, если предположить, что

$$\frac{\mathfrak{J}_\theta}{(\mathfrak{J}_\theta)_{\text{тн}}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_w} \quad \text{и} \quad \text{Pr} = \text{Pr}_{\text{турб}} = \text{const.}$$

В этом случае $\text{Pr}_{\text{эфф}} = \text{Pr}_{\text{турб}} = \text{Pr}$ и уравнение (7.110) принимает вид

$$\frac{\mu_w c_p (\bar{\theta}_w - \bar{\theta})}{(\mathfrak{J}_\theta)_w \delta} = \frac{\text{Pr}}{\delta^+} \frac{\bar{U}_1}{u^*},$$

откуда следует, что $(\bar{\theta} - \theta_0)/(\bar{\theta}_w - \theta_0) = (U_0 - \bar{U}_1)/U_0$. Однако из уравнения (7.114) вместо соотношения (7.117) получается

$$c_h = \frac{1}{2 \text{Pr}} c_f. \quad (7.118)$$

В случае воздуха $\text{Pr} \approx 0,71$. Результаты различных измерений распределения тепла и вещества при течении в трубе, по-видимому, указывают на то, что турбулентное число Прандтля в среднем составляет около $0,65 \div 0,70$. Вёрц и Шервуд [45] по опытам с диффузией гелия, городского газа и углекислого газа в турбулентном потоке в двумерном канале получили значение турбулентного числа Прандтля, равное 0,72. По опытным данным Фридриха, опубликованным Лорен-

цем [46], для воздуха, движущегося по нагретой трубе ($Re_D \approx 10^5$), Рейхардт [10] получил значение 0,65.

Маккартер, Штуцман и Кох [47] обнаружили, что диффузия тепла от источника в воздушном потоке в вертикальной трубе (Re_D от 7000 до 26 000) может быть описана уравнением (см. § 5.5)

$$(\epsilon_9)_{22} = 0,02 \bar{U}_{cp} D \sqrt{\lambda}.$$

Если принять, что для ядра течения в трубе $(\epsilon_m)_{11} \approx 0,035 u^* D$ (см. рис. 7.39), то при $u^* = \bar{U}_{cp} (\lambda/8)^{1/2}$ получим

$$(\epsilon_m)_{11} = 0,0125 \bar{U}_{cp} D \sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, и в этом случае имеем $Pr_{\text{турб}} = (\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_9)_{22} \approx 0,63$.

Таким образом, если принять, что $Pr_{\text{турб}}$ изменяется от 0,65 до 0,70, то при $Pr \approx 0,71$ для воздуха имеем $Pr_{\text{турб}} \approx Pr$. Этим можно объяснить, почему аналогия Рейнольдса, как мы видели, применима для ядра течения в трубе (см. рис. 7.51). Однако турбулентное число Прандтля $Pr_{\text{турб}}$ для пристеночной области может довольно заметно отличаться от своего значения в области ядра, так что здесь аналогия Рейнольдса даже приближенно уже более не будет справедлива. Это находит свое отражение в расхождении распределений температуры и скорости в пристеночной области, а также в отклонении от простой связи (7.117) между c_h и c_f . Уравнение (7.117) не содержит числа Прандтля, хотя определенного влияния этого параметра и следует ожидать из-за наличия вязкого подслоя, в котором преобладают процессы молекулярного переноса.

Различные модификации аналогии Рейнольдса, предложенные в последнее время, относятся главным образом к переносу в пристеночной области. При этом вводились определенные предположения относительно величин $Pr_{\text{эфф}}$, $\mathfrak{S}_0/(\mathfrak{S}_9)_w$ и σ_w/σ_{12} .

Выше было показано, что в пристеночной области распределение скорости хорошо описывается формулами, основанными на предположении $\sigma_w/\sigma_{12} \approx 1$ (слой постоянного напряжения). Вполне очевидное предположение, которое следует принять относительно величины $\mathfrak{S}_1/(\mathfrak{S}_9)_w$, состоит в том, что для пристеночной области $\mathfrak{S}_9/(\mathfrak{S}_9)_w \approx 1$. Кроме того, считается, что $\mu_w/\mu \approx 1$ и $\rho_w/\rho \approx 1$. Тогда уравнение (7.114) принимает вид

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \int_0^1 Pr_{\text{эфф}} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2, \quad (7.119)$$

а из уравнения (7.109) следует, что

$$Pr_{\text{эфф}} = \left[\frac{1}{Pr_{\text{турб}}} + \left(\frac{1}{Pr} - \frac{1}{Pr_{\text{турб}}} \right) \frac{1}{\delta^+} \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} \right]^{-1}. \quad (7.120)$$

Рассмотрим теперь вкратце, придерживаясь хронологической последовательности, модификации теории Рейнольдса.

Независимо друг от друга Тэйлор, Прандтль и Кольбурн предложили некоторые видоизменения этой теории, которые в общих чертах сходны между собой. При этом пограничный слой условно разделяется на две отдельные области, в одной из которых, прилегающей к стенке, процессы переноса по своей природе являются молекулярными (вязкий подслой), а процессы переноса в другой области полностью определяются турбулентностью.

В вязком подслое $(\epsilon_m)_{11} = (\epsilon_m)_{22} = 0$; так как в этой области

$$\frac{d}{dz_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} = \delta^+,$$

то из уравнения (7.12) следует очевидный результат $Pr_{эфф} = Pr$.

Для турбулентной области принимается аналогия Рейнольдса; поэтому здесь $Pr_{эфф} = 1$. Таким образом, из уравнения (7.119) получаем

$$\frac{1}{c_h} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \left[Pr \frac{(\bar{U}_1)_l}{u^*} + \frac{U_0 - (\bar{U}_1)_l}{u^*} \right],$$

или

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} \left[1 + (Pr - 1) \frac{(\bar{U}_1)_l}{U_0} \right].$$

Здесь $(\bar{U}_1)_l$ — скорость при $x_2 = \delta_l$, т. е.

$$\frac{(\bar{U}_1)_l}{u^*} = \frac{u^* \delta_l}{\nu} = \delta^+.$$

Таким образом, соотношение между c_h и c_f имеет вид

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} + \delta_l^+ (Pr - 1) \sqrt{\frac{2}{c_f}}. \quad (7.121)$$

В § 7.5 упоминалось о том, что данные о наиболее подходящем значении δ_l^+ , используемом при описании распределения скорости, сильно расходятся. Прандтль для подстановки в уравнение (7.121) использовал значение $\delta_l^+ = 5,6$. Это значение было получено из условия, что скорость, вычисленная в некоторой точке в пограничном слое из закона линейного распределения в вязком подслое, должна равняться величине, вычисленной из распределения скорости по закону « $1/7$ ».

Соотношение (7.121) приводит к приемлемому согласию с опытом, лишь если число Прандтля Pr не слишком сильно отличается от единицы. Для более высоких значений Pr оно дает заниженные значения c_h . Это можно объяснить следующим образом. При больших значениях Pr молекулярный перенос импульса происходит с более

высокой скоростью, нежели молекулярный перенос тепла. Однако из-за наличия переходной области на перенос тепла вблизи стенки заметное (хотя и слабое) влияние будет оказывать турбулентность по соседству с вязким подслоем. Следовательно, логично предположить, что при больших значениях Pr влиянием переходной области пренебрегать нельзя.

Поэтому Карман [48] в своем анализе рассматривал как вязкий подслой, так и переходную область, причем для переходной области принималось, что $Pr_{турб} = 1$. Однако для зоны, лежащей снаружи этого слоя, т. е. для полностью турбулентной области, Карман также воспользовался предположением об аналогии Рейнольдса. Для толщины вязкого подслоя и переходного слоя Карман принял соответственно значения $\delta_l^+ = 5$ и $\delta_l^+ = 30$.

Таким образом, при $x_2^+ < \delta_l^+$ имеем $Pr_{эфф} = Pr$ и $\bar{U}_1^+ = x_2^+$, а при $\delta_l^+ < x_2^+ < \delta_l^+$

$$Pr_{эфф} = \left[1 + \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{5}{x_2^+} \right]^{-1}.$$

Для распределения скорости Карман просто принял выражение

$$U_1^+ = 5 \left(1 + \ln \frac{x_2^+}{5} \right).$$

При $x_2^+ > \delta_l^+$, как и прежде, $Pr_{эфф} = 1$.

Тогда из уравнения (7.119) после интегрирования получаем

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} + 5 \left[(Pr - 1) + \ln \frac{1 + 5Pr}{6} \right] \sqrt{\frac{2}{c_f}}. \quad (7.122)$$

Это соотношение приводит к существенному улучшению по сравнению с формулой (7.121), хотя при $Pr = 10$ все же наблюдается отклонение от действительных значений c_h , величина которого, по-видимому, зависит от числа Рейнольдса.

Дальнейшие видоизменения, внесенные Гофманом [9], отличаются, главным образом, предположениями о распределении скорости в переходной области и о величинах δ_l^+ и δ_l^+ .

В своей первой теории Гофман разделил переходную область на две части и принял намного меньшее, нежели Карман, значение δ_l^+ , усилив, таким образом, влияние турбулентности в областях, более близких к стенке. Во второй теории Гофман положил $\delta_l^+ = 0$ и принял предположение о том, что распределение скорости, которое отражает постепенно ослабляющееся по направлению к стенке влияние турбулентности (см. § 7.4), имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^+ &= x_2^+ - 0,001113x_2^{+3} && \text{при } 0 < x_2^+ < 15,5, \\ \bar{U}_1^+ &= 3 + 3,05 \ln x_2^+ && \text{при } 15,5 < x_2^+ < 25, \end{aligned}$$

Для участка снаружи переходной области, т. е. при $x_2^+ > 25$, как и прежде, принималась аналогия Рейнольдса.

Таким способом Гофман вычислил зависимость Nu от Pr . На рис. 7.52 результаты этих расчетов изображены вместе с зависимостью, полученной по теории Кармана. Результаты своих расчетов Гофман сравнивал с эмпирическими соотношениями Крауссольда [49], которые имеют вид:

а) для нагревания

$$Nu = 0,024 Re_D^{0,8} Pr^{0,37},$$

б) для охлаждения

$$Nu = 0,024 Re_D^{0,8} Pr^{0,3}.$$

Эти зависимости также изображены на рис. 7.52.

Расчеты Гофмана при сравнении с опытами по нагреванию имеют заметное преимущество перед теорией Кармана. Но в случае опытов с охлаждением при больших числах Прандтля величины Nu оказываются значительно ниже и согласие между этими величинами и теми,

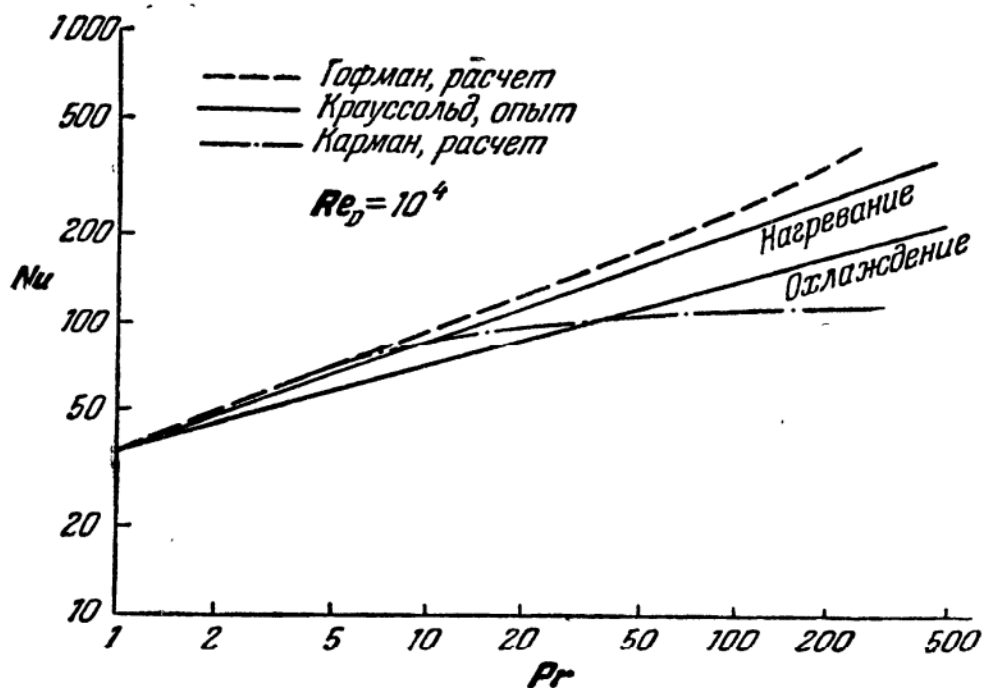


Рис. 7.52. Сравнение расчетных и экспериментальных данных о теплообмене в турбулентном потоке в трубе [9].

которые получаются по теории Гофмана, ухудшается. Так как опыты Крауссольда проводились с жидкостями, вязкость которых при уменьшении температуры возрастала, то указанные низкие значения можно объяснить, предполагая, что с возрастанием вязкости и ее демпфирующего влияния степень турбулентности вблизи стенки становится ниже.

Рейхардт [10] внес существенные улучшения в изложенные теории в двух направлениях. (1) Он впервые учел переменность физических

свойств жидкости, обусловленную температурным полем в поперечном сечении пограничного слоя. (2) Он не принял никаких допущений о возможных аналогиях между переносом импульса и тепла в какой-либо из областей пограничного слоя. Таким образом, Рейхардт воспользовался полными уравнениями (7.110) и (7.114). Относительно величин $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ и σ_{12}/σ_w он принял предположение, что произведение $[\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w](\sigma_w/\sigma_{12})$ имеет порядок единицы. Это предположение, помимо иных доказательств, подтверждается собственными вычислениями Рейхардта для распределения $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ (см. ниже). Изменение физических свойств жидкости учитывалось Рейхардтом путем введения средних (по сечению) значений для вязкого подслоя и других средних значений для переходной области. Чтобы получить интегрируемые выражения для распределения температуры и для c_p , Рейхардт аппроксимировал распределение скорости в переходной области экспоненциальной функцией. Однако, несмотря на это, окончательный результат описывается довольно громоздким выражением.

Мы уже говорили, что позднее Рейхардт [12] предложил другое распределение скорости [см. уравнение (7.44)], которое несколько лучше соответствует действительному распределению, нежели экспоненциальная функция. Конечно, лучше было бы воспользоваться уточненным распределением скорости (7.44), но тогда интегралы, содержащиеся в уравнениях (7.110) и (7.114), становятся очень громоздкими и допускают лишь численное решение.

Однако если пользоваться численным решением, то, применяя метод итераций, можно получить точное решение. При этом в уравнениях (7.110) и (7.114) используются данные о действительном распределении скорости. В первом приближении величину $[\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w](\sigma_w/\sigma_{12})$ можно положить равной единице, а для μ_w/μ , Pr и $Pr_{турб}$ можно принять средние значения. После этого по полученному распределению температуры, пользуясь методом, рассмотренным выше [см. уравнение (7.127)], можно вычислить распределение $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$. Аналогично могут быть вычислены по их температурной зависимости и величины μ_w/μ и Pr . Таким образом, получаем $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$, μ_w/μ и Pr как новые функции ξ_2 . Пользуясь этими новыми функциями, можно найти новое численное решение уравнений (7.110) и (7.114).

С помощью уточненного распределения температуры можно получить второе приближение для переменных величин, пользуясь которым, снова можно вычислить интересующие нас интегралы и т. д.

Однако вместо применения этого трудоемкого способа всегда стараются получить решение в замкнутой форме. Единственным возможным путем достижения этой цели является метод, который применялся упомянутыми выше исследователями. Результаты подобных расчетов в итоге полностью зависят от справедливости принятых при этом предположений.

Так, Дайслер [13] предположил, что $Pr_{турб} = 1$ и что влияние изменений σ_{12} и \mathfrak{S}_0 в поперечном сечении потока в трубе или в пограничном слое на распределения скорости и температуры пренебрежимо мало. Им было показано, что постольку, поскольку Pr не очень сильно отличается от единицы, допущение о линейном распределении σ_{12} и \mathfrak{S}_0 приводит практически к таким же распределениям скорости и температуры, как и предположение о равномерности распределения этих величин, во всяком случае при значениях u^*D/ν , лежащих в диапазоне от 1000 до 10 000. Дайслер исходил при этом из уравнения (7.105), в котором он положил $\mathfrak{S}_0 = (\mathfrak{S}_0)_w$, а для

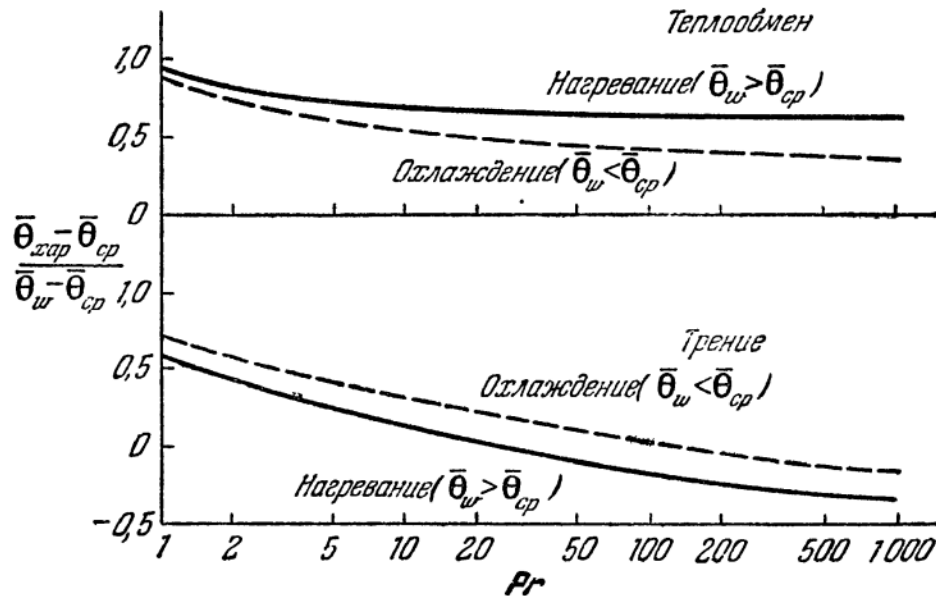


Рис. 7.53. Зависимость характерной температуры от числа Прандтля для определения кажущихся постоянных свойств жидкости [13].

$(\epsilon_\theta)_{22}$ принял такое же выражение, как и для $(\epsilon_m)_{11}$, а именно уравнение (7.45). Подобно решению для распределения скорости, решение для распределения температуры может быть получено только численным методом.

Дайслер исследовал также влияние изменения вязкости жидкости с температурой. Он получил интересный результат, что даже при наличии зависимости вязкости от температуры расчеты могут проводиться при постоянном значении коэффициента вязкости, если это значение брать при соответствующей характерной температуре. Эта характерная температура зависит от числа Прандтля Pr , уменьшаясь с его ростом, причем эта зависимость для теплообмена и для переноса импульса (трение) неодинакова, а также имеет различный вид при нагревании и при охлаждении. Для капельных жидкостей эти функции представлены на рис. 7.53. При $Pr > 10$ характерную температуру для теплообмена можно считать приблизительно равной

$\Theta_{\text{хар}} - \bar{\Theta}_{\text{ср}} \approx 0,5 (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}_{\text{ср}})$; эта величина представляет собой хорошо известную так называемую пленочную температуру.

Теоретические результаты Дайслера для c_h находятся в очень хорошем соответствии с опытными данными, полученными многими исследователями для различных жидкостей при значениях числа Прандтля вплоть до 3000. Кривая теоретической зависимости c_h от Pr показана на рис. 7.54. Наибольшая часть экспериментальных данных отклоняется от расчетной зависимости менее чем на 10%, а величина максимальных отклонений составляет около 20%. Эти экспериментальные материалы содержат также данные о массообмене.

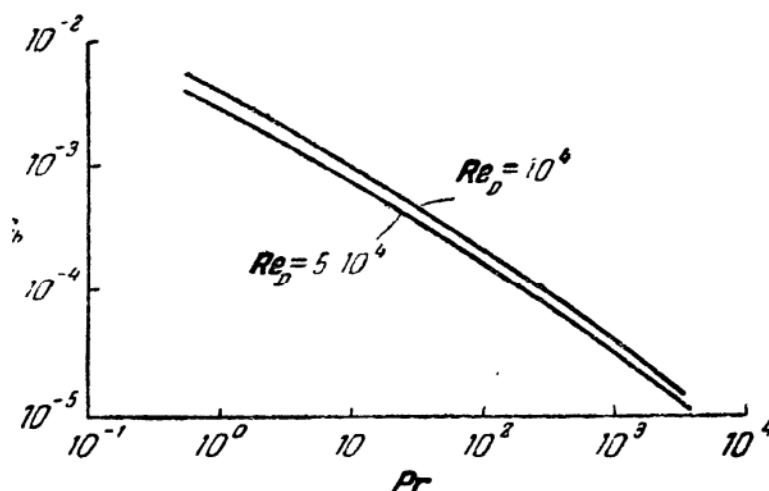


Рис. 7.54. Расчетная зависимость коэффициента сопротивления потоку тепла от числа Прандтля [13].

В случае массообмена применимы те же расчетные соотношения, в которых число Прандтля Pr должно быть заменено числом Шмидта Sc , а c_h — соответствующим коэффициентом, характеризующим сопротивление потоку массы.

Исследования Дайслера показали, что коэффициент c_h , характеризующий сопротивление тепловому потоку, совершенно нечувствителен к тем предположениям, которые принимаются относительно характера изменения различных параметров потока снаружи пристеночной области, и что он определяется главным образом условиями, характерными для пристеночной области, если число Рейнольдса потока велико. Этот вывод подтверждается сравнением результатов нескольких авторов, которые в своих расчетах пользовались различными предположениями.

Следовательно, имеется полное основание полагать, что для течения вне пристеночной области аналогия Рейнольдса справедлива, а для пристеночной области нельзя ограничиться лишь предположением, что $\sigma_{12}/\sigma_w \approx 1$, а следует также считать, что $\mathfrak{F}_0/(\mathfrak{F}_0)_w \approx 1$.

Тогда уравнение (7.114) может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{c_h} = \frac{2}{c_f} + \sqrt{\frac{2}{c_f}} \int_0^{\xi_2''} (\text{Pr}_{\text{эфф}} - 1) \frac{d}{d\xi_2} \frac{\bar{U}_1}{u^*} d\xi_2 = \frac{2}{c_f} + \sqrt{\frac{2}{c_f}} F(\text{Pr}), \quad (7.123)$$

поскольку содержащийся здесь интеграл зависит только от Pr . Величина ξ_2'' соответствует границе пристеночной области.

В качестве аналитического выражения для распределения скорости, которое достаточно хорошо годится для всей пристеночной области, следует рассматривать формулу Рейхардта (7.44). Однако, как уже упоминалось, она приводит к интегралам, которые не могут быть решены в замкнутой форме.

Для полностью турбулентной части пристеночной области справедливо логарифмическое распределение скорости. Распределение подобного типа совместимо с предположением о том, что коэффициент вихревой вязкости имеет линейную зависимость от x_2^+ . Если принять, что величина $(\epsilon_0)_{22}$ тоже является линейной функцией x_2^+ , то в результате получится логарифмическое распределение температуры, в чем можно убедиться непосредственно из рассмотрения уравнения (7.105), в котором $\mathfrak{S}_\theta = (\mathfrak{S}_\theta)_w = \text{const}$, а величиной κ по сравнению с $\rho_{\text{ср}} (\epsilon_0)_{22}$ пренебрегается.

Для вязкого подслоя и переходной области Рэнни [50] предложил следующее распределение скорости:

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = \frac{1}{\alpha_1} \text{th}(\alpha_1 x_2^+), \quad (7.124)$$

которое при $\delta_t^+ = 27,5$ и $\alpha = 0,0688$, сливается с логарифмическим распределением. Соответствующее выражение для коэффициента вихревой вязкости имеет вид

$$\frac{(\epsilon_m)_{11}}{\nu} = \text{sh}^2(\alpha_1 x_2^+). \quad (7.125)$$

При очень малых значениях x_2^+ эта формула приводит к квадратичной зависимости $(\epsilon_m)_{11}/\nu$ от x_2^+ , что находится в близком соответствии с экспериментальными данными (см. §§ 7.6 и 7.9, а также рис. 7.41).

Далее, Рэнни ввел предположение о том, что в пристеночной области $\text{Pr}_{\text{турб}} = 1$, и получил из решения уравнения (7.123) функцию $F(\text{Pr})$ в замкнутой форме. Эта функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \text{Pr} > 1 \\ F(\text{Pr}) = \frac{\text{Pr}}{\alpha_1 \sqrt{\text{Pr} - 1}} \arctg(\alpha_1 \sqrt{\text{Pr} - 1} \delta_t^+) - \\ - \frac{1}{\alpha} \ln \left[\delta_t^+ - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \right] - B, \end{aligned}$$

при $Pr < 1$

$$F(Pr) = \frac{Pr}{\alpha_1 \sqrt{1-Pr}} \operatorname{arcth} \left(\alpha_1 \sqrt{1-Pr} \delta_t^+ \right) - \frac{1}{\alpha} \ln \left[\delta_t^+ - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{Pr} \right) \right] - B. \quad (7.126)$$

Постоянные α и B имеют те же значения, что и в формуле логарифмического распределения скорости (7.32). Рэнни принял следующие значения: $\alpha = 0,4$ и $B = 5,5$. Сравнение результатов расчета по этой теории с опытными данными Шервуда и Петри [61] в диапазоне изменения числа Прандтля $0,8 < Pr < 100$ приводит к удовлетворительному совпадению.

Помимо рассмотренных здесь соотношений для c_h и Nu , выражающих зависимость их от Re и Pr и основанных на более или менее реалистических представлениях о процессах переноса, естественно, имеется множество чисто эмпирических соотношений. Читателям, интересующимся этими соотношениями, можно рекомендовать учебники по тепло- и массообмену (см., например, [51]).

Возвращаясь к теоретическим решениям, следует отметить, что ценность этих решений, как мы видели, обуславливается лежащими в основе их представлениями о процессах переноса, в особенности в пристеночной области, а также предположениями, которые вытекают из этих представлений.

Напомним, что эти предположения касаются распределения скорости и распределений Pr , μ_w/μ , σ_{12}/σ_w , $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ и $Pr_{\text{турб}}$.

Дайслером было показано, что изменение Pr и μ_w/μ можно учесть путем выбора правильного значения характерной температуры. Изменение σ_{12}/σ_w при течении в трубе строго следует линейной зависимости от расстояния до стенки, однако для пристеночной области как в пограничном слое, так и при течении в трубе оказывается справедливым предположение о том, что $\sigma_{12}/\sigma_w \approx 1$.

Таким образом, нам остается, по существу, рассмотреть только изменение $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ и $Pr_{\text{турб}}$.

Для случая течения в трубе Рейхардт [10], пользуясь уравнением теплового баланса, вычислил изменения $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ в поперечном сечении трубы при различных значениях чисел Рейнольдса и Прандтля. При этом он исходил из обычного предположения, что влияние диффузии тепла в направлении течения пренебрежимо мало по сравнению с конвективным переносом под действием осредненного движения; это предположение можно считать справедливым, за исключением, быть может, области, очень близкой к стенке.

Рассмотрим элементарную кольцевую область длиной dx_1 , заключенную между цилиндрами с радиусами соответственно

$$\frac{D}{2} - x_2 \quad \text{и} \quad \frac{D}{2} - (x_2 + dx_2).$$

Уравнение теплового баланса для этого элементарного объема запишется в виде

$$\frac{d}{dx_2} \left[2\pi \left(\frac{D}{2} - x_2 \right) dx_1 \mathfrak{S}_\theta \right] dx_2 = - 2\pi \left(\frac{D}{2} - x_2 \right) dx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho \bar{U}_1 c_p \bar{\Theta}) dx_1,$$

откуда

$$\left(\frac{D}{2} - x_2 \right) \mathfrak{S}_\theta = - c_p \int_0^{x_2} \left(\frac{D}{2} - x_2 \right) \rho \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_1} dx_2 + \frac{D}{2} (\mathfrak{S}_\theta)_w,$$

или

$$(1 - \xi_2) \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} = 1 - \frac{\int_0^{\xi_2} (1 - \xi_2) \rho \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_1} d\xi_2}{\int_0^1 (1 - \xi_2) \rho \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_1} d\xi_2}.$$

Далее, Рейхардт принял, что распределение температуры является полностью установившимся и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}) = - \text{const} (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}).$$

Тогда записанное выше уравнение принимает вид

$$(1 - \xi_2) \frac{\mathfrak{S}_\theta}{(\mathfrak{S}_\theta)_w} = 1 - \frac{\int_0^{\xi_2} (1 - \xi_2) \bar{U}_1 \rho (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}) d\xi_2}{\int_0^1 (1 - \xi_2) \bar{U}_1 \rho (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}) d\xi_2}. \quad (7.127)$$

Таким способом Рейхардт вычислил $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w$ в первом приближении, воспользовавшись для этой цели распределением температуры, найденным им собственным приближенным методом, рассмотренным выше. Соответствующие результаты расчета при $\text{Pr} = 0,72$ и 200 и при $\text{Re}_D = 5 \cdot 10^3$ и $4 \cdot 10^5$ представлены на рис. 7.55.

На основании этого рисунка можно сделать вывод о том, что $\mathfrak{S}_\theta/(\mathfrak{S}_\theta)_w > \sigma_{12}/\sigma_w$ и что отношение этих величин при больших значениях Pr и Re_D стремится к единице. Следовательно, предположение о том, что в пристеночной области $\mathfrak{S}_\theta \approx (\mathfrak{S}_\theta)_w$ определенно является менее спорным, нежели предположение о том, что $\sigma_{12} \approx \sigma_w$.

Рассмотрим теперь турбулентное число Прандтля $\text{Pr}_{\text{турб}}$, которое представляет собой отношение коэффициентов вихревой диффузии для импульса и для тепла.

Турбулентное число Прандтля определялось многими исследователями для течения в трубе и в плоском канале. Известны как сум-

марные, так и локальные значения $Pr_{\text{турб}}$. Выше в настоящем параграфе уже упоминалось, что когда движущейся жидкостью является воздух, то наблюдавшиеся значения суммарного числа Прандтля лежат в диапазоне от 0,6 до 0,75.

Исходя из распределений температуры и скорости, измеренных в воздушном потоке в горизонтальном канале (высотой 1,9 см и шириной 30,5 см), верхняя и нижняя стенки которого поддерживались при различных, но постоянных температурах, Пейдж со своими сотрудниками [52] нашел распределение $Pr_{\text{турб}}$ в поперечном сечении

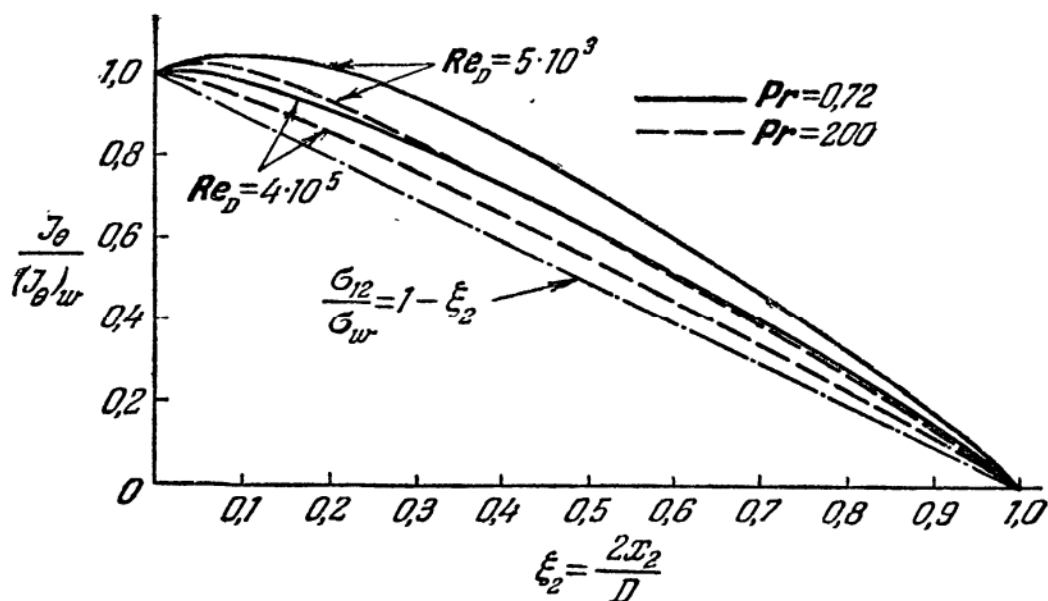


Рис. 7.55. Влияние критериев Re_D и Pr на распределение потока тепла в поперечном направлении при течении в трубе [10].

канала. Оказалось, что турбулентное число Прандтля $Pr_{\text{турб}}$ возрастает с увеличением Re_D , стремясь к единице, и уменьшается с удалением от центра по направлению к пристеночной области. Каких-либо данных для пристеночной области получить при этом не удалось.

Однако совершенно противоположные результаты были получены Исаковым и Дрю [53] для ртути, движущейся вверх по вертикальной нагретой трубе с внутренним диаметром 3,8 см. Согласно этим опытам, величина $Pr_{\text{турб}}$ уменьшается с увеличением Re_D и изменяется в поперечном сечении трубы таким образом, что ее минимальное значение соответствует примерно $\xi_2 = 0,2$; по направлению к стенке $Pr_{\text{турб}}$ резко возрастает. При этом были получены значения $Pr_{\text{турб}}$ как больше, так и меньше единицы. В рассматриваемом случае, как и прежде, каких-либо данных для пристеночной области тоже не приводится.

Данные о $Pr_{турб}$, полученные Пейджем с сотрудниками, как и результаты опытов Исакова и Дрю, показывают, что при данном значении Pr произведение $Pr_{турб} Re_D^n$ является однозначной функцией ξ_2 . Для воздушного потока получается величина $n = -0,15$, а в случае течения ртути $n = 0,46$.

Не имея каких-либо сведений о характеристиках турбулентных пульсаций температуры, очень трудно дать удовлетворительное объяснение этих результатов.

Однако логично ожидать заметного влияния молекулярного числа Прандтля на турбулентное число Прандтля. В главе 5 было показано, что коэффициент вихревой диффузии зависит от интенсивности молекулярного обмена блуждающих жидких частиц и жидких молекул с их непосредственным окружением. Когда молекулярное число Прандтля очень велико, то молекулярного переноса тепла практически не происходит и величина ϵ_9 должна приближаться к коэффициенту диффузии жидких частиц ϵ . Так как $\epsilon_m/\epsilon < 1$, то отсюда следует, что при больших значениях Pr турбулентное число Прандтля $Pr_{турб}$ всегда должно быть меньше единицы.

В тех случаях, когда молекулярное число Прандтля невелико, поведение $Pr_{турб}$ становится менее ясным. По крайней мере, можно утверждать, что при очень малом Pr между блуждающими жидкими частицами происходит очень интенсивный теплообмен, вследствие чего значения ϵ_9 становятся относительно малыми и величина $Pr_{турб}$ поэтому может оказаться больше единицы. При меньших значениях числа Рейнольдса этот эффект проявляется сильнее. Наоборот, с увеличением числа Рейнольдса образуются все более и более мелкие вихри, вследствие чего молекулярные процессы и их влияние ослабевают; в результате этого величина ϵ_m/ϵ_9 может уменьшиться; в то же время каждый из коэффициентов ϵ_m и ϵ_9 также уменьшается. По-видимому, в случае ртути ($Pr = 0,024$) величина $Pr_{турб}$, которая при низких Re_D больше единицы, с увеличением Re_D , минуя единицу, стремится к еще меньшим значениям.

В приведенных выше рассуждениях мы умышленно пренебрегали влиянием диффузии какого бы то ни было неградиентного типа на процессы переноса. Однако хорошо известно, что в случае свободных турбулентных потоков, рассмотренных в главе 6, не удастся пренебречь влиянием на перенос тепла крупномасштабных движений, а этот эффект относится к категории факторов неградиентного типа. Или, лучше сказать, в этом случае оказалось невозможным дать удовлетворительное описание полного переноса тепла с помощью лишь диффузии градиентного типа.

Аналогично можно ожидать, что крупномасштабные турбулентные движения, наблюдающиеся во внешней области пограничного слоя и в ядре течения в трубе, будут оказывать существенное влияние

на вихревой перенос тепла. Это влияние может исказить результаты всех тех измерений турбулентного переноса, которые основаны на представлениях о диффузии градиентного типа, т. е. в результаты, основанные на коэффициентах вихревой диффузии и турбулентных числах Прандтля.

§ 7.12. Отдельные задачи пристеночной турбулентности

В этом параграфе мы кратко рассмотрим несколько проблем, почти не затронутых в предыдущих разделах, главным образом, потому, что по этим проблемам имеется слишком мало экспериментальных данных и они до сих пор содержат много нерешенных вопросов.

Этими проблемами являются: (1) влияние шероховатости стенки на перенос тепла, (2) влияние турбулентности свободного потока на процессы переноса в турбулентном пограничном слое и (3) влияние сжимаемости жидкости.

Влияние шероховатости стенки на теплообмен

Экспериментальные данные показывают, что если относительная шероховатость достаточно мала, то ее влиянием на картину турбулентного течения можно пренебречь. В случае песочной шероховатости это справедливо, согласно опытам Никурадзе, скажем, при $u^*k/\nu < 5$. Следовательно, можно ожидать, что перенос тепла в потоке вдоль шероховатой стенки, обладающей малой относительной шероховатостью, будет подобен переносу тепла в потоке вдоль гладкой стенки, за исключением, быть может, незначительного влияния, обусловленного увеличением площади поверхности шероховатой стенки.

С увеличением шероховатости в пределах $5 < u^*k/\nu < 55$ (для песочной шероховатости) наблюдается рост ее влияния на картину течения; среди прочих явлений отмечается уменьшение эффективной толщины вязкого подслоя. Это уменьшение оказывает влияние на перенос тепла поперек пограничного слоя в силу того, что элементы шероховатости вызывают возмущения в вязком подслое, которые способствуют турбулентному переносу. Иными словами, элементы шероховатости усиливают «активную» роль вязкого подслоя, проявляющуюся даже в случае гладкой стенки. С увеличением числа Прандтля это благотворное воздействие на перенос тепла будет возрастать.

Когда шероховатость становится настолько большой, что $u^*k/\nu > 55$ (это численное значение, как и выше, относится к песочной шероховатости), то эффективная толщина вязкого подслоя обращается в нуль (см. рис. 7.8 и 7.9). В этом случае сопротивление течению

перестает зависеть от молекулярного переноса импульса, т. е. от вязкости, и, следовательно, от числа Рейнольдса. По-видимому, логично считать, что перенос тепла также не будет испытывать влияния молекулярного переноса и, следовательно, не будет зависеть не только от числа Рейнольдса, но и от числа Прандтля.

Это предположение представляется вполне логичным, однако против него можно высказать серьезные возражения. В полностью турбулентной части потока перенос тепла определяется величиной ϵ_T , причем этот коэффициент вихревой диффузии зависит от числа Прандтля. Стало быть, сохраняется по меньшей мере влияние числа Прандтля на перенос тепла.

Посмотрим теперь, какие явления происходят вблизи стенки. Примем, что течение развивается в условиях вполне шероховатой стенки, при которых сопротивление течению не зависит от числа Рейнольдса. Сопротивление течению, оказываемое элементами шероховатости, складывается из вязкого сопротивления стенки и сопротивления формы. В условиях вполне шероховатой стенки элементы шероховатости погружены в полностью турбулентную часть пристеночной области настолько далеко, что сопротивление формы становится преобладающим, и в результате этого сопротивление соответствует квадратичному закону, будучи независимым от числа Рейнольдса.

Однако перенос тепла не обязательно должен следовать той же модели, что и перенос импульса. Из опытных данных по измерению переноса тепла на цилиндре и сфере, обтекаемых равномерным потоком, известно, что число Нуссельта остается функцией числа Рейнольдса, даже когда коэффициент сопротивления уже перестает зависеть от числа Рейнольдса. Это наблюдается также и в случае, когда свободный поток сам по себе является турбулентным (см. ниже). Следовательно, если элементы шероховатости рассматривать как малые тела, присоединенные к гладкой стенке и обтекаемые турбулентным потоком, то, по аналогии со сказанным выше, можно ожидать влияния числа Рейнольдса на перенос тепла от стенки к жидкости при любом значении числа Рейнольдса, а также, очевидно, и влияния числа Прандтля, хотя эти эффекты, по всей вероятности, могут оказаться слабее, нежели в случае гладкой стенки.

Первые опыты, поставленные специально для исследования влияния шероховатости стенки на теплообмен, были проведены Полем [54], который изучал перенос тепла к жидкостям, движущимся по шероховатым трубам. Однако в этих опытах значения u^*k/ν были меньше 12; поэтому они не смогли дать ответа на вопросы, поднятые выше.

К сожалению, то же самое приходится сказать и об обширных измерениях, проведенных Смитом и Эпштейном [55] при исследовании теплообмена и трения в воздушном потоке в гладкой медной трубе ($D=0,6$ см) и в шести других промышленных трубах ($D=0,3-0,9$ см) с относительной шероховатостью D/k от 640 до 64, при числах

Рейнольдса от 10^4 до $8 \cdot 10^4$. Было отмечено некоторое увеличение коэффициентов теплоотдачи с возрастанием шероховатости, но даже в трубе с наибольшей шероховатостью едва ли удалось достичь условий вполне шероховатой стенки при наивысшем значении Re_D ; при этом все еще наблюдалась слабая зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса.

Более завершенными являются результаты опытов Нуннера [42]. Искусственная шероховатость, созданная Нуннером в медной трубе ($D = 5$ см) с помощью кольцевых шайб, в переводе на эквивалентную песочную шероховатость составляла $k = 2,28$ см! Значения

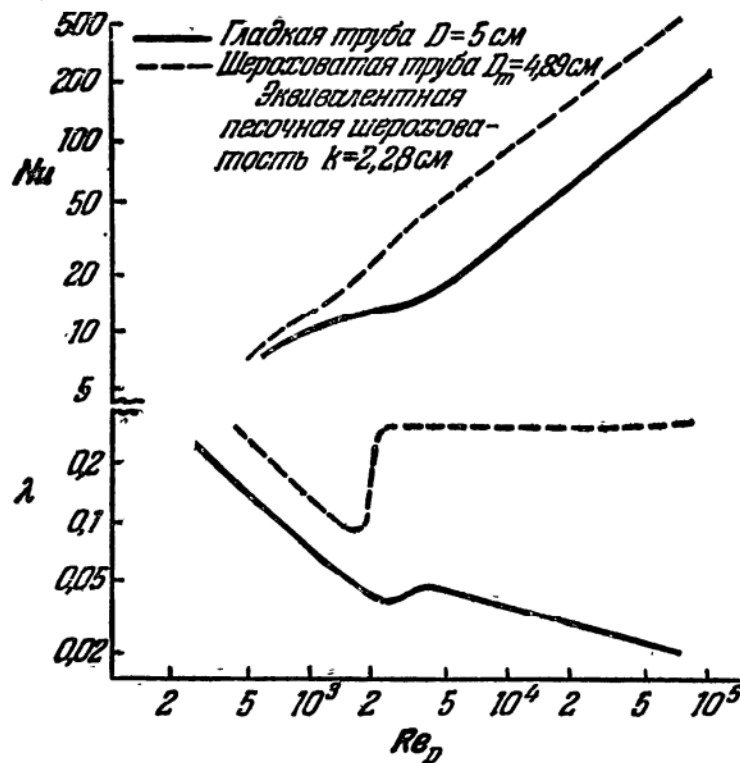


Рис. 7.56. Влияние шероховатости стенки на теплообмен и трение при течении воздуха [42].

числа Рейнольдса были достаточно высоки, чтобы обеспечивать широкий диапазон, в котором выполнялись условия вполне шероховатой стенки. Однако эти опыты проводились только на воздухе, и поэтому число Прандтля оставалось неизменным. Нуннеру удалось получить зависимость Nu от Re_D для любых условий шероховатости. В логарифмических координатах зависимости Nu от Re_D при $Re_D > 3000$, как и в случае гладкой стенки, представляют собой практически прямые линии. Эти линии почти параллельны соответствующей линии для гладкой стенки и смещены относительно нее по вертикали, причем это смещение увеличивается с возрастанием эффективной шероховатости. Таким образом, никакого заметного отклонения от зависимости от числа Рейнольдса для гладкой стенки в этих опытах получено не было. На рис. 7.56 изображены две

кривые для двух предельных случаев: гладкой трубы и трубы с наибольшей эквивалентной песочной шероховатостью $k = 2,28$ см. При обработке экспериментальных данных для шероховатой трубы использовалось осредненное значение диаметра D_m . Этот осредненный диаметр определялся как эквивалентный диаметр гладкой трубы, имеющей такой же объем на единицу длины.

Интересно отметить, что в случае шероховатой трубы не наблюдалось заметного различия между зависимостями Nu от Re_D для областей «ламинарного» ($Re_D < 2000$) и турбулентного режимов течения, тогда как зависимость λ от Re_D характеризуется обычной переходной зоной вблизи значения $Re_D = 2000$, хотя в области ламинарного режима течения коэффициенты трения оказываются значительно выше, нежели для гладкой трубы. Наблюдающееся в случае гладкой трубы относительное увеличение числа Нуссельта при уменьшении числа Рейнольдса в переходной области и в области ламинарного режима течения может вызываться вторичными течениями, обусловленными влиянием архимедовых сил, которое усиливается при убывании скорости осредненного потока, т. е. при уменьшении числа Рейнольдса. Предположение о существовании этих вторичных течений подкрепляется своеобразными несимметричными профилями температуры, измеренными Нуннером. Очевидно, теми же эффектами объясняется и «прямолинейное» продолжение кривой (Nu, Re_D) для шероховатой трубы при ламинарном режиме течения, стремящееся к кривой для гладкой трубы.

Из своих исследований Нуннер сделал вывод, что влияние шероховатости стенки на теплообмен подобно эффекту, который должен наблюдаться при изменении числа Прандтля. Он обобщил зависимость $Nu(Re_D, Pr)$, которая следует из формулы Прандтля (7.121), учтя влияние шероховатости стенки:

$$Nu = \frac{\lambda}{8} \frac{Re_D Pr}{1 + 1,5 Re_D^{-1/8} Pr^{-1/6} (Pr \lambda / \lambda_0 - 1)}.$$

Здесь λ_0 обозначает коэффициент трения в случае гладкой стенки при том же значении Re_D . Это соотношение согласуется с собственными данными Нуннера с точностью до 20%.

Наличие члена $Pr \lambda / \lambda_0$ отражает эквивалентность влияния числа Прандтля и шероховатости на теплообмен. Но, поскольку опыты Нуннера проводились только с воздухом, влияние числа Прандтля требует дальнейшего экспериментального исследования.

В связи с тем, что как теплообмен, так и трение возрастают с увеличением шероховатости стенки трубы, возникает интересный вопрос, дает ли какие-либо экономические выгоды искусственное увеличение шероховатости; этот вопрос изучался, например, Нуннером [42] и Кохом [66], который продолжил опыты Нуннера. Этот

вопрос возникает потому, что путем увеличения массового расхода в гладкой трубе можно получить такие же значения Nu или C_h , как и в шероховатой трубе с одинаковым диаметром. Если произведение массового расхода жидкости на величину градиента давления окажется для гладкой трубы выше, чем для шероховатой, то применение шероховатой трубы будет экономически выгодным. Из-за сложности процессов теплообмена в турбулентном потоке в шероховатой трубе невозможно заранее предсказать, какому из этих двух путей следует отдать предпочтение. Вообще говоря, применение шероховатых труб оказывается менее выгодным с экономической точки зрения, что можно отнести, по всей вероятности, за счет относительно большой доли сопротивления формы элементов шероховатости в полном сопротивлении течению. Однако вполне возможны также и такие случаи, когда применение шероховатой трубы с экономической точки зрения становится более выгодным. Этот вывод следует, например, из результатов опытов Нуннера и вполне определенно был подтвержден Кохом.

Влияние турбулентности свободного потока на процессы переноса в пограничном слое

Когда свободный поток снаружи пограничного слоя на теле сам по себе является турбулентным, он будет оказывать влияние на процессы турбулентного переноса в пограничном слое. Пока интенсивность турбулентности свободного потока относительно невелика, т. е. меньше интенсивности турбулентности в турбулентном пограничном слое, можно ожидать, что это влияние будет ограничено лишь наружными областями пограничного слоя. Но с увеличением интенсивности турбулентности свободного потока ее влияние может усилить процесс турбулентного переноса.

В случае течения около тела влияние турбулентности свободного потока может быть трех видов:

1. Расположенная выше по потоку часть пограничного слоя на теле обычно еще не является турбулентной, и в некоторой точке вниз по потоку от передней критической точки происходит переход течения в турбулентное. Турбулентность в свободном потоке может не только оказать влияние на положение этой точки перехода, но и вызвать также возмущения в ламинарной части пограничного слоя и, стало быть, повлиять на процессы переноса в ней.

2. Как отмечалось выше, турбулентность свободного потока может оказывать влияние на турбулентную часть пограничного слоя на теле.

3. Если за телом имеется след, то турбулентность свободного потока может взаимодействовать с течением в следе,

Из результатов измерения локального переноса тепла на сферах и цилиндрах известно, что максимальная интенсивность теплообмена наблюдается в передней критической точке и в кормовой части тела, а минимальная интенсивность имеет место на боковых поверхностях этих тел. Значит, можно ожидать, что влияние турбулентности свободного потока на перенос тепла будет наибольшим на фронтальной поверхности тела и в его кормовой части.

Первые измерения по оценке влияния интенсивности турбулентности свободного потока на перенос тепла были проведены, по-видимому, Райхером [56], которому удалось экспериментально обнаружить 50%-ное усиление переноса тепла при поперечном обтекании цилиндра воздушным потоком, турбулизированным при помощи решетки.

Аналогичные опыты были поставлены Лойцянским и Швабом [57], которые для этой цели воспользовались нагретыми сферами диаметром 7 см. Путем повышения относительной интенсивности турбулентности свободного потока от 0,5% почти до 3% они получили увеличение Nu на 30–35% при значениях числа Рейнольдса Re (отнесенного, по-видимому, к диаметру сферы и скорости свободного потока) от $5 \cdot 10^4$ до 10^5 .

Камингс, Клэпп и Тэйлор [58] определили значения Nu для случая переноса тепла от цилиндра ($Re \approx 6000$), когда относительная интенсивность турбулентности изменялась от 2 до 21%. Максимальное увеличение Nu составило в этих опытах примерно 25%; быстрота этого увеличения существенно возрастала лишь в диапазоне изменения интенсивности турбулентности от 2 до 5%. Анализируя результаты этих опытов, Де Хаас ван Дорссер, Ленигер и Ван Меэль [59] пришли к выводу, что любое увеличение интенсивности турбулентности выше 5% не имеет почти никакого смысла. Эти авторы сами производили измерения скорости испарения воды с плоской поверхности промокательной бумаги. В соответствии с их выводом им удалось обнаружить, что увеличивать интенсивность турбулентности выше 5% не требуется. При таком увеличении интенсивности они получили повышение скорости испарения почти на 50%.

В отличие от результатов Камингса и его сотрудников, опыты Майзеля и Шервуда [60] по испарению воды с поверхности пропитанных влагой сфер и цилиндров показали, что скорость испарения с увеличением интенсивности турбулентности всегда возрастает; оказалось, что быстрота этого возрастания увеличивается с повышением числа Рейнольдса.

Майзель и Шервуд поставили также несколько опытов, в которых изменялся интегральный масштаб турбулентности свободного потока. Им не удалось обнаружить какого-либо влияния изменения этой величины на скорость испарения. Однако надо заметить, что все использованные при этом различные масштабы турбулентности были сравнимы по своему размеру с диаметром сферы или цилиндра.

Сато и Сэйдж [62] недавно опубликовали результаты измерений переноса тепла от электрически нагреваемой сферы к воздушному потоку. В этих опытах серебряная сфера ($D = 1,25$ см) помещалась в «потенциальное» ядро струи, которое могло быть турбулизовано с помощью решетки, установленной выше по потоку. Решетка представляла собой перфорированную пластину с отверстиями диаметром 2,2 см, равномерно расположенными с шагом 2,5 см. Относительная интенсивность турбулентности свободного потока вокруг сферы посредством изменения положения сферы относительно решетки могла быть увеличена до 15%. Измерения проводились при трех значениях скорости струи, соответствующих $Re_D = 2000$; 4000 и 8000. Относительное число Нуссельта Nu/Nu_0 (Nu_0 соответствует нулевой относительной интенсивности турбулентности) возрастало с увеличением Re_D и относительной интенсивности турбулентности, достигая значения 2,42 при $Re_D = 8000$ и при относительной интенсивности турбулентности, равной 15%.

Значительно более полные измерения с целью выяснения влияния интенсивности и интегрального масштаба турбулентности на перенос тепла от электрически нагреваемого цилиндра к воздушному потоку были осуществлены Ван дер Хегге Цийненом [63]. В этих опытах в воздушный поток, искусственно турбулизованный с помощью решетки, помещались цилиндры различных диаметров, от 0,306 до 4,19 см. При этом использовались три решетки с квадратными ячейками, изготовленные из плоских полос (размер ячейки/ширина полосы = 2,7/0,7; 5,2/0,2 и 8,0/1,0). Средняя скорость воздушного потока составляла около 1200 см/сек. Относительная интенсивность турбулентности свободного потока в районе расположения цилиндра изменялась за счет попеременного использования этих трех решеток и изменения положения цилиндра относительно решетки; при этом также изменялось отношение интегрального масштаба к диаметру цилиндра. Пользуясь большим количеством данных, полученных для переноса тепла к воздушному потоку и характеризующих одновременное влияние относительной интенсивности и отношения интегрального масштаба к диаметру цилиндра, Ван дер Хегге Цийнен смог разделить эти два эффекта. В результате он получил следующее эмпирическое соотношение:

$$\frac{Nu}{Nu_0} = 1 + \varphi \left(\frac{u'_1 D}{\nu} \right) \psi \left(\frac{\Lambda_f}{D} \right),$$

где Λ_f — продольный интегральный масштаб.

На рис. 7.57 изображены кривые зависимости Nu/Nu_0 от Λ_f/D , параметром которых, в соответствии с этим соотношением, выбрана относительная интенсивность турбулентности u'_1/\bar{U}_1 . Поскольку $u'_1 D/\nu = (u'_1/\bar{U}_1) Re_D$, то в качестве параметра вместо u'_1/\bar{U}_1 можно также

выбрать величину $u'_1 D/\nu$; в настоящих опытах величина $u'_1 D/\nu$ изменялась в пределах от 0 до 1150.

Опираясь на формулу Ван дер Хегге Цийнена, можно объяснить кажущиеся несоответствия и даже противоречия, обнаруженные в литературе по влиянию интенсивности и масштаба турбулентности на теплообмен. Любопытно заметить, что, как можно видеть, имеется оптимальное значение Λ_f/D , не зависящее от $u'_1 D/\nu$, при котором отношение Nu/Nu_0 достигает своей максимальной величины, а именно $\Lambda_f/D \approx 1,6$. Существование довольно резко выраженного максимума

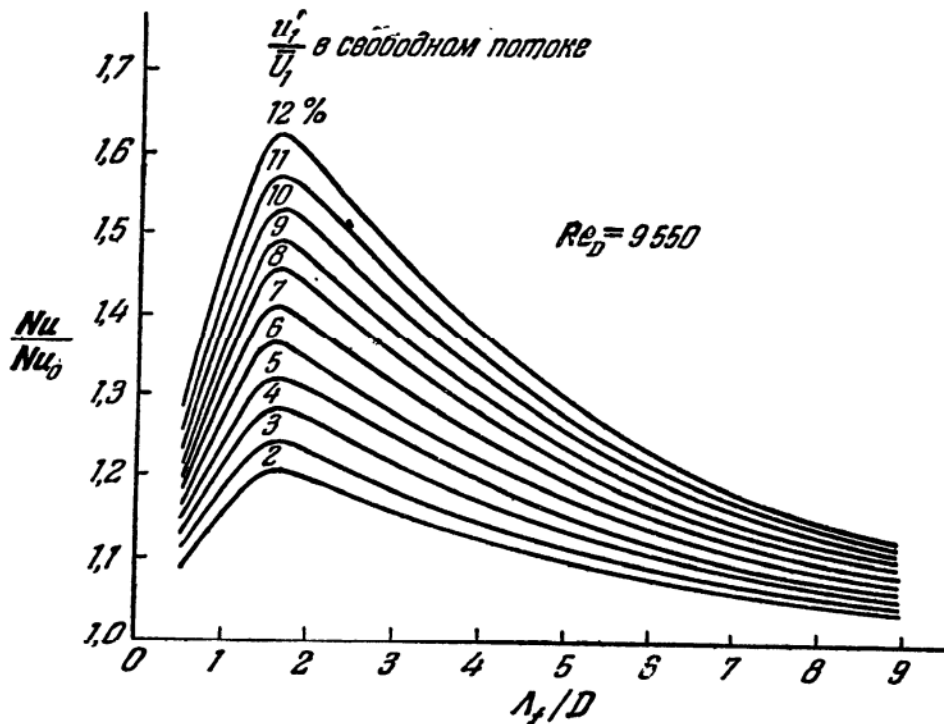


Рис. 7.57. Влияние интенсивности и масштаба турбулентности свободного потока на перенос тепла от цилиндра [63].

при фиксированном значении Λ_f/D , по-видимому, указывает на своего рода резонанс между осредненной частотой турбулентного потока и частотой образования вихрей в следе за цилиндром.

Частота образования вихрей приблизительно равняется $0,2\bar{U}_1/D$. Если принять предположение о резонансе с энергосодержащими вихрями турбулентного потока, то эта частота образования должна быть равна удвоенной частоте энергосодержащих вихрей, т. е. $\bar{U}_1 k_e/\pi$, где k_e — волновое число, соответствующее этим вихрям. В случае изотропной турбулентности $\Lambda_f \approx 0,75/k_e$ [см. уравнение (3.138)]. Отсюда получается значение $\Lambda_f/D \approx 1,2$, которое по порядку величины совпадает со значением 1,6, найденным экспериментально.

Подобный резонанс может приводить к увеличению интенсивности пульсаций в пограничном слое на цилиндре, особенно в следе за ним,

и способствовать, таким образом, возрастанию скорости переноса тепла. В пользу подобной интерпретации результатов опытов Ван дер Хегге Цийнена говорит увеличение разрежения на поверхности цилиндра (связанное с увеличением пульсаций скорости и давления на боковой поверхности цилиндра и в следе за ним) с возрастанием степени турбулентности свободного потока, когда величина Λ_f/D равняется примерно 1,6.

В случае пограничного слоя на плоской пластине влияние турбулентности свободного потока на перенос тепла от пластины может, по-видимому, проявляться только в ламинарном пограничном слое перед точкой перехода или, вероятно, в ускорении самого перехода; однако в полностью развитой турбулентной части пограничного слоя это влияние вряд ли может наблюдаться. Нам известно, что течение в пристеночной области турбулентного пограничного слоя нечувствительно к условиям, существующим снаружи пограничного слоя. Благодаря тому, что основное сопротивление переносу тепла проявляется в пристеночной области, никакого влияния турбулентности свободного потока на скорость переноса тепла от пластины не должно наблюдаться. Иначе говоря, никакого влияния не следует ожидать до тех пор, пока число Прандтля жидкости не станет настолько малым, что сопротивление переносу тепла не будет более ограничено пристеночной областью, или пока возмущения пограничного слоя, накладываемые внешними условиями, не станут настолько сильными, что смогут проникнуть в вязкий подслой.

Анализируя в свете этих представлений результаты, полученные Эдвардсом и Фарбером [64], мы не заметим ничего удивительного. Эдвардс и Фарбер произвели измерение переноса тепла от изолированной области плоской пластины, помещенной в параллельный ей поток воздуха, который мог быть турбулизирован с помощью решеток, устанавливаемых вверх по потоку от пластины. Максимальная величина относительной интенсивности турбулентности составляла в этих опытах до 5%. В турбулентной части пограничного слоя не удалось отметить совершенно никакого влияния на перенос тепла, однако заметное влияние наблюдалось в переходной области. При относительной интенсивности турбулентности свободного потока 5% турбулентное течение в пограничном слое устанавливалось при $Re_{x_1} \approx 10^5$, в то время как при отсутствии турбулизующей решетки течение не становилось турбулентным, пока не достигалось значение $Re_{x_1} \approx 10^6$. Наибольшее увеличение числа Нуссельта, обусловленное влиянием турбулентности свободного потока, составляло при $Re_{x_1} \approx 2,5 \cdot 10^5$ около 70%.

Турбулентность свободного потока оказывала при этом небольшое влияние на ламинарную часть пограничного слоя, предшествующую переходной области.

Влияние сжимаемости жидкости

Данных о влиянии сжимаемости жидкости на механизм турбулентного течения в пограничном слое или в трубе известно очень мало. Это влияние слишком слабо, чтобы его следовало учитывать в рассмотренных выше течениях, обладающих малой скоростью; однако его нельзя более игнорировать в случае потоков большой (сверхзвуковой) скорости. Торможение свободного потока большой скорости в пограничном слое вызывает превращение кинетической энергии, благодаря сжатию, в тепло, вследствие чего происходит повышение температуры. Поскольку выделение теплоты сжатия в пограничном слое неравномерно, то под действием молекулярной и турбулентной диффузии происходит перенос тепла. В результате этого температура вблизи стенки может стать отличной от температуры торможения. Эта разница зависит от молекулярного числа Прандтля, а также от степени тепловой изоляции стенки.

Можно ожидать, что главное влияние сжимаемости в высокоскоростном пограничном слое будет связано с изменениями свойств жидкости, обусловленными изменениями температуры.

Некоторые сведения о влиянии сжимаемости на распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое при больших значениях числа Маха свободного потока были получены Лоббом, Винклер и Першем [65] по измерениям распределений полного давления и температуры в поперечных сечениях. Значения числа Маха M_0 свободного потока составляли в этих опытах 5,0, 6,8 и 7,7.

Распределение скорости в вязком подслое оказалось линейным и подчиняющимся соотношению $\bar{U}_1^+ = x_2^+$; вязкость при этом определялась по температуре стенки. Это распределение выполнялось для значительно большей области, нежели в случае несжимаемой жидкости, а именно вплоть до $\delta_1^+ \approx 12$ при $M_0 = 6,8$ по сравнению с $\delta_1^+ \approx 5$ для несжимаемой жидкости. Переход к полностью турбулентной области был значительно менее плавным, а в полностью турбулентной части пристеночной области наблюдались отклонения от логарифмического распределения скорости, которые зависели от интенсивности теплообмена со стенкой.

Распределение скорости во внешней области турбулентного пограничного слоя вполне удовлетворительно аппроксимировалось степенным законом

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = z_2^{1/n}.$$

Величина n с возрастанием числа Маха уменьшалась. Так, при $M_0 = 5,0$ величина n составляла примерно 7, а число Рейнольдса Re_δ незначительно изменялось в диапазоне от $1,5 \cdot 10^5$ до $1,65 \cdot 10^5$; при $M_0 = 6,8$ [$Re_\delta = (1,81 \div 2,94) \cdot 10^5$] было получено значение $n = 6$.

а при $M_0 = 7,7$ ($Re_\delta = 2 \cdot 10^5$) — $n \approx 5,5$. Поскольку показатель степени n зависит также от Re_δ (возрастает при увеличении Re_δ), то это влияние, естественно, сказывается и на приведенных выше значениях n .

По распределению скорости в вязком подслое Лобб, Винклер и Перш определили также напряжение сдвига на стенке σ_w , а по σ_w — коэффициент трения $c_f = \sigma_w \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2$. Эти данные, а также данные других авторов были систематизированы Кьюзом [32] на графике, который мы приводим на рис. 7.58. Здесь отношение $c_f/c_{f,i}$, где

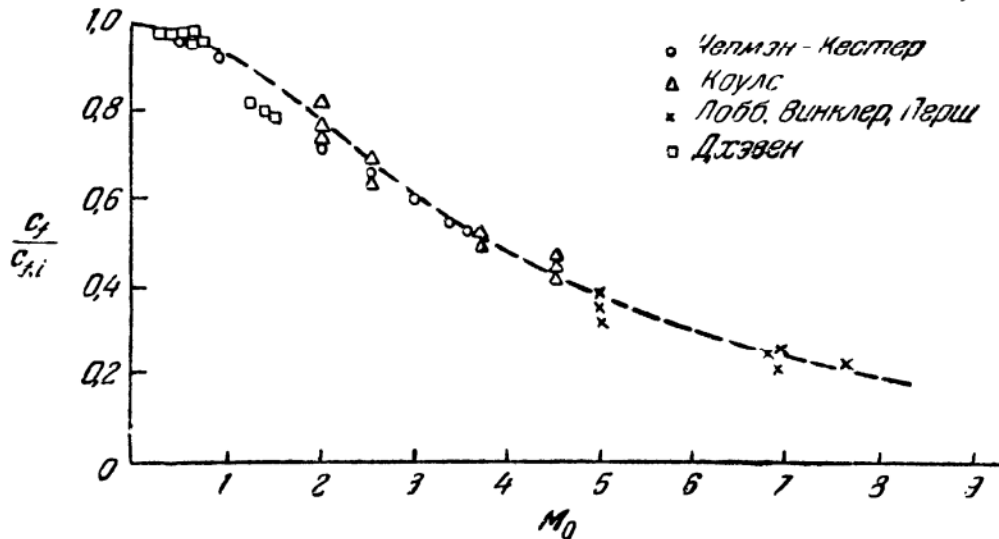


Рис. 7.58. Влияние числа Маха свободного потока на коэффициент трения о стенку c_f для сжимаемого газа, отнесенный к коэффициенту $c_{f,i}$ для несжимаемой жидкости [32].

величина $c_{f,i}$ относится к несжимаемой жидкости, изображено в зависимости от числа Маха свободного потока. Хотя при этом и наблюдается некоторое влияние числа Рейнольдса, все же основное изменение коэффициента трения связано с влиянием числа Маха. Убывание этого отношения с ростом числа Маха связано с тем, что это отношение приблизительно пропорционально некоторой положительной степени величины Θ_0/Θ_w , которая убывает с ростом числа Маха, т. е. с увеличением температуры торможения. Для изотермического потока несжимаемой жидкости можно записать следующее приближенное соотношение [см. уравнение (7.61)]:

$$c_{f,i} = \text{const} \left(\frac{\rho_0 U_0 \delta}{\mu_0} \right)^{-m}.$$

Если принять, что такое же соотношение справедливо и в случае сжимаемого пограничного слоя, а величины ρ и μ определить из условий на стенке, то получим

$$\frac{\sigma_w}{\frac{1}{2} \rho_w U_0^2} = \text{const} \left(\frac{\rho_w U_0 \delta}{\mu_w} \right)^{-m},$$

откуда

$$c_f = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2} = \text{const} \frac{\rho_w}{\rho_0} \left(\frac{\rho_w U_0 \delta}{\mu_w} \right)^{-m} =$$

$$= c_{f,i} \left(\frac{\rho_w}{\rho_0} \right)^{1-m} \left(\frac{\mu_w}{\mu_0} \right)^m \approx c_{f,i} \left(\frac{\Theta_0}{\Theta_w} \right)^{1-(n+1)m};$$

здесь предполагается, что $\mu_w/\mu_0 \approx (\Theta_w/\Theta_0)^n$. Для наблюдающихся в действительности значений m и n величина $(n+1)m$ меньше единицы.

Годдардом [67] было проведено исследование влияния шероховатости стенки на сжимаемый пограничный слой. Он обнаружил, что если выполняется условие вполне шероховатой стенки, то вплоть до $M_0 = 5$ влияние сжимаемости носит лишь опосредствованный характер. Коэффициент трения c_f зависит, как и в случае несжимаемой жидкости, только от u^*k/ν . Поскольку при условии вполне шероховатой стенки непосредственного влияния вязкости не наблюдается, то $c_f/c_{f,i} = \rho_w/\rho_0$, так что в целом влияние сжимаемости сказывается в уменьшении плотности жидкости вблизи поверхности. Смещение профиля скорости $\Delta \bar{U}_1/u^*$ зависит, по-видимому, только от параметра u^*k/ν (ср. с рис. 7.9, соответствующим случаю несжимаемой жидкости).

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

c_f — $\sigma_w / \frac{1}{2} \rho U_0^2$, коэффициент трения о стенку.

c_h — коэффициент, характеризующий сопротивление тепловому потоку вблизи стенки.

D — диаметр трубы.

$E_2(k_1), E_2(k_2)$ — одномерный спектр кинетической энергии турбулентности.

f — коэффициент пространственной продольной корреляции скорости.

g — коэффициент пространственной поперечной корреляции скорости.

H — δ_d/δ_m , формпараметр пограничного слоя.

$h(\xi_2)$ — поправочная функция для логарифмического закона избыточной скорости.

$h_1(\xi_2)$ — поправочная функция Милликена для логарифмического распределения скорости.

k — параметр шероховатости, средняя высота элементов шероховатости.

L_i — масштаб длины в направлении x_i .

- l — масштаб длины для пространственных изменений турбулентных пульсаций скорости.
- M_0 — число Маха свободного потока.
- Nu — число Нуссельта.
- P — статическое давление; \bar{P} — осредненная по времени величина; p — турбулентная пульсация; P_0 — статическое давление в свободном потоке.
- Pr — ν/κ_0 , число Прандтля; $Pr_{\text{турб}} = (\epsilon_m)_{11}/(\epsilon_\theta)_{22}$; $Pr_{\text{эфф}} = \frac{c_p \mu_{\text{эфф}}}{\kappa_{\text{эфф}}}$.
- \bar{q}^2 — $u_i u_i$, удвоенная кинетическая энергия турбулентности.
- Re — число Рейнольдса; $Re_D = \bar{U}_{\text{ср}} D/\nu$; $Re_{x_1} = U_0 x_1/\nu$; $Re_\delta = U_0 \delta/\nu$; $Re_{\delta_d} = U_0 \delta_d/\nu$.
- r — цилиндрическая полярная координата в радиальном направлении; радиальное расстояние от оси трубы.
- Sc — число Шмидта.
- U_i — эйлерова скорость; \bar{U}_i — осредненная по времени величина; u_i — компонента турбулентной пульсации; $u'_i = \sqrt{\bar{u}_i^2}$; U_0 — скорость свободного потока; $\bar{U}_{x, \text{max}}$ — максимальная скорость на оси потока в трубе; $\bar{U}_{\text{ср}}$ — средняя скорость в поперечном сечении потока в трубе; $u^* = (\sigma_w/\rho)^{1/2}$ — динамическая скорость; $\bar{U}_i^+ = \bar{U}_i/u^*$; индексы r , φ и x соответствуют цилиндрическим полярным координатам.
- $\omega(\xi_2)$ — поправочная функция Коулса для логарифмического распределения скорости.
- x — цилиндрическая полярная координата в осевом направлении; x_1 — декартова координата; $x_2^+ = x_2 u^*/\nu$.
- δ — толщина пограничного слоя; δ_d — толщина вытеснения; δ_m — толщина потери импульса; δ_e — толщина потери энергии; $\delta^+ = \delta u^*/\nu$; δ_l — толщина вязкого подслоя; $(\delta_l - \delta_l)$ — толщина переходного слоя.
- Δ — толщина диссипации пограничного слоя.
- ϵ — диссипация под действием турбулентности на единицу массы.
- $\epsilon' = \nu \overline{(\partial u_j / \partial x_j)(\partial u_j / \partial x_i)}$.
- $(\epsilon_m)_{ij}$ — тензор вихревой диффузии для импульса; $(\epsilon_\theta)_{ij}$ — то же для тепла.
- φ — цилиндрическая полярная координата в окружном направлении.
- \mathfrak{S} — поток через единицу площади; \mathfrak{S}_θ — для тепла.
- z — универсальная постоянная Кармана.

- K — коэффициент теплопроводности: $K_{эфф} = K + \rho c_p (\epsilon_\theta)_{22}$;
 $R_\theta = K/c_p \rho$.
 l — прандтлевский путь смешения; l_m — то же для импульса.
 Λ_f — пространственный продольный интегральный масштаб.
 Λ_g — пространственный поперечный интегральный масштаб.
 λ — коэффициент трения о стенку при течении в трубе.
 μ — динамический коэффициент вязкости; $\mu_{эфф} = \mu + \rho (\epsilon_m)_{11}$.
 ν — кинематический коэффициент вязкости.
 Ω — коэффициент перемежаемости.
 Π — параметр Коулса для профиля скорости в пограничном слое.
 π — 3,14159 ...
 ρ — плотность.
 σ_{ij} — тензор напряжений.
 σ_w — напряжение сдвига на стенке.
 Θ — температура; $\bar{\Theta}$ — осредненная по времени величина;
 Θ — турбулентная пульсация; $\bar{\Theta}_w$ — температура стенки; Θ_0 — температура свободного потока; $\bar{\Theta}_{min}$ — температура на оси потока в трубе.
 \mathcal{U}_i — масштаб скорости в направлении x_i .
 ν — масштаб турбулентных пульсаций скорости.
 $\xi_1 = x_i/\delta$; $\xi_2 = 2x_2/D$; $\xi'_2 = 1 - \xi_2$.
-

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Для читателей, незнакомых с тензорным исчислением, дадим краткий обзор тех его элементов, которые часто применяются в этой книге.

Тензор представляет собой величину, которая остается инвариантной и преобразуется в самое себя при повороте системы координат.

В зависимости от числа независимых параметров, или компонент, определяющих тензор, будем различать тензоры разных рангов, сложность которых возрастает с увеличением ранга, т. е. с увеличением числа компонент.

Наипростейший тензор определяется лишь одной компонентой. Это — тензор нулевого ранга, или скаляр, и, будучи таковым, он инвариантен относительно поворота системы координат.

Следующим по сложности является тензор первого ранга, или вектор, который определяется тремя компонентами.

Однако прежде чем переходить к дальнейшему рассмотрению тензоров и их инвариантности относительно поворота системы координат, обратимся к анализу преобразования координат точки в пространстве трех измерений при подобном повороте.

Пусть P — точка, координатами которой в системе (x_1, x_2, x_3) являются x_1, x_2 и x_3 (см. рис. П. 1). Введем новую систему координат (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , относительно которой координаты точки P обозначим через x_1^*, x_2^* и x_3^* .

Тогда имеем тождество

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2}. \quad (\text{П. 1})$$

Координаты x_1, x_2 и x_3 с помощью углов между соответствующими координатными осями старой и новой систем можно выразить через координаты x_1^*, x_2^* и x_3^* .

Обозначим через (x_1, x_1^*) угол, на который следует повернуть положительную ось x_1 , чтобы она совпала с положительной осью x_1^* .

Аналогично через (x_1, x_3^*) обозначим угол между положительной осью x_1 и положительной осью x_3^* .

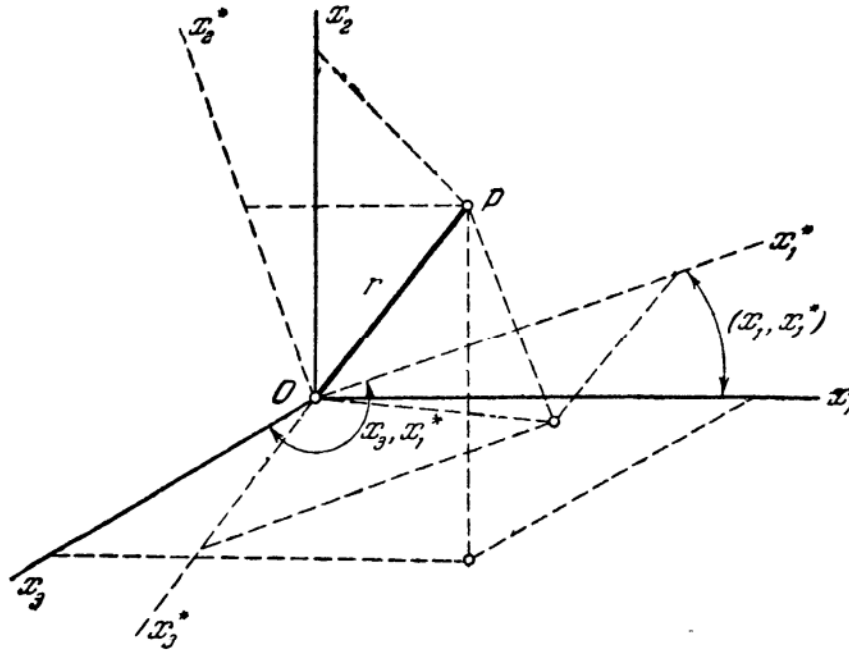


Рис. П. 1. Преобразование системы координат.

В общем случае (x_i, x_j^*) — угол между положительной осью x_i старой системы координат и положительной осью x_j^* новой системы координат ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$).

Тогда имеем

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos(x_1, x_1^*) + x_2 \cos(x_2, x_1^*) + x_3 \cos(x_3, x_1^*), \\ x_2^* &= x_1 \cos(x_1, x_2^*) + x_2 \cos(x_2, x_2^*) + x_3 \cos(x_3, x_2^*), \\ x_3^* &= x_1 \cos(x_1, x_3^*) + x_2 \cos(x_2, x_3^*) + x_3 \cos(x_3, x_3^*). \end{aligned}$$

Если различные направляющие косинусы для краткости записать как

$$e_{11} = \cos(x_1, x_1^*), \quad e_{21} = \cos(x_2, x_1^*), \quad \dots$$

или в общем виде

$$e_{ij} = \cos(x_i, x_j^*),$$

то приведенная выше система трех уравнений примет вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 e_{11} + x_2 e_{21} + x_3 e_{31}, \\ x_2^* &= x_1 e_{12} + x_2 e_{22} + x_3 e_{32}, \\ x_3^* &= x_1 e_{13} + x_2 e_{23} + x_3 e_{33}. \end{aligned} \tag{П. 2}$$

Заметим, что (1) первый индекс в e_{ij} относится к старой системе координат и что (2) в общем случае $e_{ij} \neq e_{ji}$, так как $\cos(x_i, x_j^*) \neq \cos(x_j, x_i^*)$.

С другой стороны, величину x_i старой системы можно выразить через x_j^* новой системы и получить при этом другую систему трех уравнений, аналогичную (П. 2):

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1^* e_{11} + x_2^* e_{12} + x_3^* e_{13}, \\x_2 &= x_1^* e_{21} + x_2^* e_{22} + x_3^* e_{23}, \\x_3 &= x_1^* e_{31} + x_2^* e_{32} + x_3^* e_{33}.\end{aligned}\tag{П. 3}$$

Направляющие косинусы e_{ij} образуют нормированную ортогональную систему. Соотношения их ортогональности можно вывести, пользуясь тождеством (П. 1). Введем, например, в правую часть (П. 1) выражения (П. 2) для x_i^* :

$$\begin{aligned}r^2 &= x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} = \\&= (x_1 e_{11} + x_2 e_{21} + x_3 e_{31})^2 + (x_1 e_{12} + x_2 e_{22} + x_3 e_{32})^2 + \\&\quad + (x_1 e_{13} + x_2 e_{23} + x_3 e_{33})^2 = \\&= x_1^2 (e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2) + x_2^2 (e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2) + \\&+ x_3^2 (e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2) + 2x_1 x_2 (e_{11} e_{21} + e_{12} e_{22} + e_{13} e_{23}) + \\&+ 2x_1 x_3 (e_{11} e_{31} + e_{12} e_{32} + e_{13} e_{33}) + 2x_2 x_3 (e_{21} e_{31} + e_{22} e_{32} + e_{23} e_{33}).\end{aligned}$$

Поскольку это тождество выполняется при любых значениях x_1 , x_2 и x_3 , то коэффициенты при x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 , $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$ равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned}e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 &= 1, \\e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 &= 1, \\e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 &= 1, \\e_{11} e_{21} + e_{12} e_{22} + e_{13} e_{23} &= 0, \\e_{11} e_{31} + e_{12} e_{32} + e_{13} e_{33} &= 0, \\e_{21} e_{31} + e_{22} e_{32} + e_{23} e_{33} &= 0\end{aligned}\tag{П. 4}$$

Эта система шести уравнений представляет собой соотношения ортогональности между направляющими косинусами e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

С целью дальнейшего упрощения записи представим систему уравнений (П. 2), например, в виде

$$x_i^* = x_j e_{ji},\tag{П. 5}$$

где индексы i и j могут принимать значения 1, 2 и 3. Здесь применяется правило суммирования Эйнштейна, согласно которому суммирование должно производиться по трем величинам с повторяющимися индексами, встречающимися в выражении для общего члена.

Например, для каждого из значений i , равных 1, 2 или 3, уравнение (П. 5) должно записываться в форме $x_i^* = x_1 e_{1i} + x_2 e_{2i} + x_3 e_{3i}$ при $i = 1, 2$ или 3. Таким образом, запись (П. 5) в действительности означает систему трех уравнений, каждое из которых имеет в правой части три члена.

Аналогично систему уравнений (П. 3) можно представить в виде

$$x_j = x_i^* e_{ji}. \quad (\text{П. 6})$$

Теперь соотношения ортогональности (П. 4) можно записать в следующей сокращенной форме:

$$\begin{aligned} e_{ij} e_{kj} &= 1 & \text{при } i = k, \\ e_{ij} e_{kj} &= 0 & \text{при } i \neq k \end{aligned}$$

или в виде одного уравнения:

$$e_{ij} e_{kj} = \delta_{ik}, \quad (\text{П. 7a})$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= 1 & \text{при } i = k, \\ \delta_{ik} &= 0 & \text{при } i \neq k. \end{aligned} \quad (\text{П. 8})$$

Аналогичным способом можно показать, что

$$e_{ij} e_{ik} = \delta_{jk}. \quad (\text{П. 7б})$$

Величины x_i представляют собой координаты отрезка прямой r , который имеет заданное направление. Следовательно, такой отрезок прямой определяется тремя компонентами, а именно тремя координатами x_i .

Такая величина называется вектором или тензором первого ранга. При повороте системы координат компоненты этого вектора, или тензора первого ранга, преобразуются согласно соотношению (П. 5).

Любая величина, которая определяется тремя компонентами A_i , преобразующимися в свою очередь в соответствии с соотношением

$$A_i^* = A_j e_{ji}, \quad (\text{П. 9})$$

называется тензором первого ранга. Символически она записывается как A_i , т. е. задается тремя своими компонентами; при этом соотношение (П. 9) представляет собой правило ее преобразования.

Обратное соотношение имеет вид

$$A_j = A_i^* e_{ji}. \quad (\text{П. 10})$$

Если каждую из компонент тензора A_j умножить на скаляр B , то в результате получается новый тензор первого ранга $BA_j = C_j$:

$$BA_j = BA_i^* e_{ji} = (BA_i)^* e_{ji}, \quad (\text{П. 11})$$

откуда

$$C_j = C_i^* e_{ji}.$$

Сумма двух тензоров первого ранга A_i и B_i является опять-таки тензором первого ранга C_i , т. е.

$$A_j + B_j = A_i^* e_{ji} + B_i^* e_{ji} = (A_i + B_i)^* e_{ji}, \quad (\text{П. 12})$$

или

$$C_j = C_i^* e_{ji},$$

так что величина C_j подчиняется правилу преобразования.

Произведение двух тензоров первого ранга A_i и B_j представляет собой тензор второго ранга C_{ij} . По определению, он получается путем умножения каждой компоненты тензора B_j на каждую из компонент тензора A_i или каждой компоненты A_i на каждую компоненту B_j . Символически это записывается следующим образом:

$$A_i B_j = C_{ij}. \quad (\text{П. 13})$$

Согласно (П. 10),

$$A_i B_j = A_k^* e_{ik} B_l^* e_{jl} = (A_k B_l)^* e_{ik} e_{jl},$$

или

$$C_{ij} = C_{kl}^* e_{ik} e_{jl}. \quad (\text{П. 14})$$

Любая величина A_{ij} , которая имеет девять компонент и подчиняется правилу преобразования (П. 14), называется тензором второго ранга.

Вообще, тензор n -го ранга имеет 3^n компонент и правило его преобразования записывается так:

$$A_{ijk \dots lm}^* = A_{pqr \dots st} e_{pi} e_{qj} e_{rk} \dots e_{sl} e_{tm}. \quad (\text{П. 15})$$

n индексов n индексов

Существуют два важных тензора специального типа, один из которых является тензором второго ранга, а другой — тензором третьего ранга. Тензор второго ранга был введен выше; это — символ Кронекера, определяемый формулой (П. 8). Он представляет собой единичный тензор второго ранга и притом является симметричным. Показать, что это действительно тензор, можно следующим образом. Предположим на время, что это — тензор второго ранга, который, стало быть, подчиняется правилу

$$\delta_{ij}^* = \delta_{kl} e_{ki} e_{lj}.$$

Тогда, если δ_{kl} подчиняется соотношениям (П. 8), то и δ_{ij}^* должно подчиняться (П. 8).

При $k \neq l$ имеем $\delta_{kl} = 0$, и соответствующие члены обращаются в нуль.

При $k = l$ имеем $\delta_{kl} = 1$; поэтому

$$\delta_{ij}^* = e_{ki}e_{kj}.$$

Но, согласно соотношениям ортогональности, $e_{kl}e_{kj} = 0$, если $l \neq j$, и $e_{ki}e_{kl} = 1$, если $l = j$. Следовательно, для δ_{ij}^* соотношения (П. 8) выполняются.

Другим специальным тензором, имеющим важное значение, является антисимметричный, или «альтернирующий», тензор ϵ_{ijk} .

По определению,

$\epsilon_{ijk} = 1$, когда все индексы различны и число перестановок индексов четное,

$\epsilon_{ijk} = -1$ когда все индексы различны и число перестановок индексов нечетное,

$\epsilon_{ijk} = 0$, когда два произвольных индекса одинаковы.

Известно несколько способов запоминания этих свойств антисимметричного тензора. Здесь мы предлагаем следующее простое правило:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1,$$

$$\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1.$$

Обращаем внимание читателя на цикличность перестановки.

Указанное выше правило умножения для произведения двух тензоров первого ранга можно обобщить на случай тензоров более высокого ранга.

Таким образом, под общим произведением двух тензоров соответственно n -го и m -го рангов понимается тензор $(n + m)$ -го ранга, образованный путем умножения каждой компоненты первого тензора на каждую из компонент второго тензора или каждой компоненты второго тензора на каждую из компонент первого тензора. Например,

$$A_{ij}B_{klm} = C_{ijklm}. \quad (\text{П. 16})$$

Согласно этому правилу, умножение тензора на δ_{ij} дает тензор на два ранга выше:

$$\delta_{ij}A_{pq} = B_{ijpq}.$$

Если $j = p$, то

$$\delta_{ij}A_{jq} = B_{ljjq}.$$

Однако если тензор имеет два одинаковых индекса, то ранг тензора понижается на 2, так как пара одинаковых индексов означает суммирование по ним, а у данного тензора на два свободных индекса меньше. Следовательно,

$$B_{ljjq} = B_{i11q} + B_{i22q} + B_{i33q} = C_{iq}.$$

Покажем теперь, что $C_{iq} = A_{iq}$.

В соответствии с соотношениями (П. 7) и (П. 14) имеем

$$C_{iq} = \delta_{lj} A_{jq} = e_{ik} e_{jk} e_{js} e_{qr} A_{sr}^*.$$

Но $e_{jk} e_{js} = 0$ при $k \neq s$ и $e_{jk} e_{js} = 1$ при $k = s$; поэтому можно выбрать $e_{jk} e_{js} = 1$ и $k = s$. Тогда

$$\delta_{lj} A_{jq} = e_{ls} e_{qr} A_{sr}^* = A_{lq}.$$

Таким образом, умножение A_{jq} на δ_{lj} означает перемену индекса j в A_{jq} на l .

В общем виде

$$\delta_{ij} A_{kjrs} = A_{klrs}. \quad (\text{П. 17})$$

Эту операцию обычно называют подстановкой.

Если к тому же $l = k$, то ранг тензора понижается на 2:

$$\delta_{ij} A_{ljrs} = A_{lirs} = B_{rs}. \quad (\text{П. 18})$$

Следовательно, при умножении A_{kjrs} на δ_{kj} индексы k и j в A_{kjrs} становятся одинаковыми, т. е. повторяющимися, что приводит к понижению ранга тензора на 2. Эту операцию принято называть свертыванием индексов.

Когда перемножаются два тензора A_i и B_j первого ранга, то, если их произведение $A_i B_j$ умножить на δ_{ij} , т. е. применить операцию свертывания индексов, в результате получается тензор нулевого ранга, или скаляр:

$$\delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (\text{П. 19})$$

Этот результат представляет собой не что иное, как «скалярное» («через точку») произведение векторов A_i и B_j , обозначаемое в векторной алгебре символом $A \cdot B$.

Это правило можно обобщить и на тензоры более высокого ранга. Таким образом, скалярное произведение тензоров A_{ij} и B_{pqr} по индексам i и p имеет вид

$$\delta_{ip} A_{ij} B_{pqr} = A_{ij} B_{iqr} = C_{jqr}. \quad (\text{П. 20})$$

Так как умножение на δ_{ip} означает свертывание по индексам i и p в $A_{ij} B_{pqr}$, то скалярному произведению по определенным индексам можно сопоставить свертывание по тем же индексам.

Обобщая еще шире, можем сказать, что скалярное перемножение тензоров $A_{ij} \dots$ и $B_{pqr} \dots$ по индексам i , p и j , q ,

$$\delta_{ip} \delta_{jq} A_{ij} \dots B_{pqr} = A_{lj} \dots B_{ljr} \dots,$$

идентично свертыванию по индексам i , p и j , q .

Антисимметричный характер тензора ϵ_{ijk} можно проиллюстрировать следующим образом. Умножим тензор первого ранга A_i

на ϵ_{ijk} ; при этом получится тензор четвертого ранга. Если применить свертывание по индексам l, k , то получим тензор второго ранга:

$$\epsilon_{ijk}A_k = B_{ij}. \quad (\text{П. 21})$$

Этот тензор второго ранга B_{ij} будет антисимметричным; имеем

$$B_{ij} = \epsilon_{ij1}A_1 + \epsilon_{ij2}A_2 + \epsilon_{ij3}A_3.$$

С учетом значений ϵ_{ijk} при различных i и j получаем

$$\begin{array}{lll} i=1 & j=2 & B_{12} = A_3 \\ & j=3 & B_{13} = -A_2 \\ i=2 & j=1 & B_{21} = -A_3 \\ & j=3 & B_{23} = +A_1 \\ i=3 & j=1 & B_{31} = A_2 \\ & j=2 & B_{32} = -A_1 \end{array}$$

Таким образом, компоненты тензора B_{ij} имеют вид

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П. 22})$$

откуда ясно, что тензор B_{ij} носит антисимметричный характер.

Вектор A_k обычно называют вектором антисимметричного тензора $B_{ij} = \epsilon_{ijk}A_k$. И наоборот, антисимметричный тензор, связанный с вектором, получается путем умножения на ϵ_{ijk} и последующего свертывания.

Умножим теперь произведение двух тензоров первого ранга $A_i B_j$ на ϵ_{ijk} . Тогда полученный результат оказывается просто «векторным» произведением двух векторов $A \times B$, хорошо известным в векторной алгебре:

$$\epsilon_{ijk}A_i B_j = C_{ijjk} = D_k \quad (\text{П. 23})$$

и

$$D_1 = \epsilon_{ij1}A_i B_j = A_2 B_3 - A_3 B_2,$$

$$D_2 = \epsilon_{ij2}A_i B_j = A_3 B_1 - A_1 B_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

В случае трех векторов A_i, B_j, C_k произведение $\epsilon_{ijk}A_i B_j C_k$ является скаляром:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}A_i B_j C_k &= A_1 B_2 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 - A_2 B_1 C_3 - A_1 B_3 C_2 = \\ &= A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) = A_i D_i, \end{aligned}$$

где

$$D_i = \epsilon_{ijk}B_j C_k.$$

В векторной алгебре это произведение трех векторов принято называть тройным скалярным произведением $A \cdot (B \times C)$.

В заключение этого алгебраического раздела тензорного исчисления перечислим некоторые свойства единичных тензоров δ_{ij} и ϵ_{ijk} :

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3, \\ \delta_{ij}\delta_{jl} &= \delta_{il}, \\ \delta_{ik}\epsilon_{ikm} &= 0, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.\end{aligned}$$

Справедливость последнего уравнения может быть доказана на основании свойств этих тензоров при различных l, j, k, l и m :

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 2\delta_{ii}, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6.\end{aligned}$$

Производная от скаляра по одной из координат представляет собой тензор первого ранга. Пусть A — скаляр; тогда производная по x_i запишется как $\partial A/\partial x_i$. Так как

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial x_j^*} e_{ij}, \quad (\text{П. 24})$$

то эта производная и в самом деле преобразуется по правилу преобразования (П. 6) для тензора первого ранга.

Аналогично вторая производная от скаляра представляет собой тензор второго ранга и т. д.:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l^*} \left(\frac{\partial A}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial x_l} \right) \frac{\partial x_l^*}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_l^* \partial x_j^*} e_{ij} e_{kl}. \quad (\text{П. 25})$$

Производная от тензора первого ранга по координате является тензором второго ранга. Пусть A_i — тензор первого ранга; тогда его производная запишется так: $\partial A_i/\partial x_j$. Поскольку

$$A_i = A_k^* e_{ik} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_l^*} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_l^*} e_{jl},$$

то

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = e_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l^*} (A_k^* e_{ik}) = e_{jl} e_{ik} \frac{\partial A_k^*}{\partial x_l^*}, \quad (\text{П. 26})$$

что представляет собой правило преобразования (П. 14) для тензора второго ранга.

Обобщая, можно сказать, что m -я производная тензора n -го ранга является тензором $(n + m)$ -го ранга.

В частном случае в качестве тензора первого ранга выберем одну из координат x_i . Тогда производная по координате x_j , т. е. $\partial x_i/\partial x_j$,

будет тензором второго ранга. Но так как $\partial x_i / \partial x_j = 1$, когда $i = j$, и $\partial x_i / \partial x_j = 0$, когда $i \neq j$, то

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \quad (\text{П. 27})$$

Заметим, что $\partial x_i / \partial x_i = \delta_{ii} = 3$.

Пусть A — функция от x_j ; найдем производную от A по x_i :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A(x_j) = \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial A(x_j)}{\partial x_j}.$$

Пусть A — функция от u , а u в свою очередь зависит от x_j . Тогда применение известного правила дифференцирования неявной функции дает

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial A(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x_j)}{\partial x_j}.$$

В данной книге часто приходится пользоваться этим правилом применительно к радиусу-вектору $r = \sqrt{x_j x_j}$; в этом случае соответственно имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Если $A = A(r)$, то

$$\frac{\partial A}{\partial x_j} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r} \frac{\partial A}{\partial r}.$$

Аналогично для производных более высокого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_j}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + \frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial A}{\partial r} = \\ &= \delta_{jk} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{x_j}{r^2} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{x_j}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \\ &= \delta_{jk} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{x_j x_k}{r^3} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{x_j x_k}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = \\ &= \delta_{jk} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \frac{x_j x_k}{r^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_j} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \frac{x_j x_k}{r^2} \quad \text{при } j \neq k, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{3}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \end{aligned}$$

но

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \frac{x_1^2}{r^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. J. Roy. Aeronaut. Soc., **41**, 1109 (1937). См. также [6].
2. Kármán Th., J. Aeronaut. Sci., **4**, 131 (1937).
3. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1073 (1948).
4. Prandtl L. and Tietjens O., Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics, vol. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934. (Имеется русск. перевод: Прандтль Л., Титъенс О., Гидро- и аэромеханика, тт. I и II, ГТТИ, М. — Л., 1932.)
5. Handbuch der Experimental-Physik, vol. 4, p. 1, Akademische Verlag Gesellschaft, Leipzig, 1931.
6. Dryden H. L., Ind. Eng. Chem., **31**, 416 (1939).
7. Prandtl L., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 340.
8. Flügel G., VDI-Forschungsheft № 395, 1939.
9. Garside J. E., Hall A. R. and Townend D. T. A., Nature, **152**, 748 (1943).
10. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts., № ACR 3L23, 1943.
11. Boussinesq J., Mém. prés. par div. savants à l'acad. sci. Paris, **23**, 46 (1877).
12. Sutton O. G., Atmospheric Turbulence, стр. 30, 35, London, 1949.
13. Rosenhead L., Proc. Roy. Soc. London, **226A**, 1 (1954).
14. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **157A**, 537 (1936).
15. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1142, 1953.
16. Lin C. C., Quart. Appl. Math., **10**, 295 (1935).
17. Jeans J. H., An Introduction to the Kinetic Theory of Gases, Cambridge University Press, New York, 1946.
18. Taylor G. I., Proc. London Math. Soc., **20**, 196 (1921).
19. Kampé de Fériet J., Ann. soc. sci. Bruxelles, Ser. I, **59**, 145 (1939).
20. Kármán Th., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **34**, 530 (1948).
21. Batchelor G. K., Quart. Appl. Math., **6**, 97 (1948).
22. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mick W. C. and Skramstad H. K., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 581, 1937.
23. Kalinske A. A. and Piен C. L., Ind. Eng. Chem., **36**, 220 (1944).
24. Doob J. I., Ann. Math., **43**, 352 (1946).
25. Frenkiel F. N., J. Aeronaut. Sci., **15**, 57 (1948).
26. Frenkiel F. N., O. N. E. R. A. Rapp. tech. № 34, 1948.
27. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, **164A**, 476 (1938).
28. См., например, Jeffreys H. and Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, стр. 452, Cambridge University Press, New York, 1950.
29. Dryden H. L., Quart. Appl. Math., **1**, 7 (1943).

30. Kampé de Fériet J., *Compt. rend.*, **227**, 760 (1948); см. также *Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., Public Addresses*, № 1, London, 1948.
31. Lamb H., *Hydrodynamics*, 6-е изд., стр. 677, Cambridge University Press, New York, 1932. (Имеется русск. перевод: Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, Москва, 1947.)
32. Orr W. M. F., *Proc. Roy. Irish Acad.*, **27A**, 69 (1906—1907).
33. Rayleigh, *Proc. Math. Soc. London*, **11**, 57 (1880); **19**, 67 (1887).
34. Burgers J. M., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **17**, № 2 (1939). См. также Mises R. and Kármán Th., *Advances in Applied Mechanics*, т. 1, стр. 171, New York, 1948. (Имеется русск. перевод: Проблемы механики. Сб. статей под ред. Мизеса Р. и Кармана Т., ИЛ, Москва, 1955.)
35. Munk M., *Aero Digest*, June, 1951, стр. 100; July, 1952, стр. 32.
36. Dryden H. L. and Kuethe A. M., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts.*, № 342, 1930.
37. Ertel H., *Ann. Hydrographie u. maritime Meteorol.*, **65**, 193 (1937).
38. Corrsin S., *J. Aeronaut. Sci.*, **20**, 853 (1953).
39. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., *Recherche aéronaut.* № 32, стр. 21, 1953.
40. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 3489, 1955.
41. Dryden H. L., *Z. Flugwissenschaften*, **4**, 89—95 (1956).
42. Görtler H., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **21**, 250—252 (1949).
43. Lin C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, стр. 61, Cambridge University Press, New York, 1955. (Имеется русск. перевод: Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, Москва, 1958.)
44. Lindgren E. R., *Arkiv Fysik*, **12**, 1 (1957).

К главе 2

1. McAdams W. H., *Heat Transmission*, 3-е изд., стр. 260, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954. (Имеется русск. перевод: Мак-Адамс В., Теплопередача, ОНТИ, М., 1936.)
2. Kraters H., *Physica*, **12**, 61 (1946).
3. King L. V., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **214A**, 373 (1914).
4. Frenkiel F. N., *O. N. E. R. A. Rapp. tech.*, № 37, 1948.
5. Dryden H. L. and Kuethe A. M., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts.*, № 320, 1929.
6. Betchov R., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **51**, 721 (1948).
7. Lowell H. H., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 2117, 1950.
8. Van der Hegge Zijnen B. G., *Appl. Sci. Research*, **2A**, 351 (1951).
9. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Jr., and Skramstad H. K., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts.*, № 581, 1937.
10. Frenkiel F. N., *Aeronaut. Quart.*, **5**, 1 (1954).
11. Betchov R., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **52**, 195 (1949).
12. Betchov R. and Welling W., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **53**, 432 (1950).
13. Corrsin S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts.*, № ACR 3L23, 1943.
14. Eckert E. and Drewitz O., *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, **11**, 116 (1940).
15. Kovasznay L. S. G., *J. Aeronaut. Sci.*, **17**, 565 (1950).
16. Favre A., *Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech.*, London, 1948, т. 2, стр. 44.
17. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., *Recherche aeronaut.*, № 31, стр. 37, 1953.
18. Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc. London*, **157A**, 537 (1936).

19. Townsend A. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., **43**, 560 (1947).
20. Mock W. C., Jr. and Dryden H. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 448, 1932.
21. Mock W. C., Jr., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 598, 1937.
22. Simmons L. F. G., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem. № 1919, 1939.
23. Gould R. W. F., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem. № 2240, 1945.
24. Kovasznay L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1130, 1947.
25. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts., № ACR 5K27, 1946.
26. Betchov R., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1063 (1948).
27. Laufer J., автореферат диссертации, California Institute of Technology, Pasadena, 1948.
28. Liepmann H. W., Helv. Phys. Acta, **2**, 119 (1949).
29. Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1864, 1949.
30. Ziegler M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **15**, 3 (1934).
31. Ossofsky E., Rev. Sci. Instr., **19**, 881 (1948).
32. Weske J. R., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 881, 1943.
33. Tournier M., Laurenceau P., Huebès J. J. and Seigneurin A., Recherche aéronaut., № 15, стр. 19, 1950; № 19, стр. 11, 1951.
34. Laurence J. P. and Landes L. G., Instruments, **26**, 1890 (1953) или ISA Journal **9**, 128 (1953).
35. Van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **6A**, 129 (1956).
36. Kovasznay L. S. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1209, 1954.
37. Collis D. C., Aeronaut. Quart., **4**, 93 (1952).
38. Wyatt L. A., J. Sci. Instr. **30**, 13 (1953).
39. Middlebrook G. B. and Piret E. L., Ind. Eng. Chem., **42**, 1511 (1950).
40. Richardson E. G., Trans. North East Coast Inst. Engrs. & Shipbuilders, **64**, 273 (1948).
41. Vernotte P., Compt. rend., **230**, 58 (1950).
42. Thomas P., J. Am. Inst. Elec. Engrs., **42**, 219 (1923).
43. Lindvall F. C., Trans. Am. Inst. Elec. Engrs., **53**, 1068 (1934).
44. Fucks W., Deut. Luftfahrt-Forsch. U. u. M., №№ 1202, 1203, 1205, 1431, 1943—1944.
45. Fucks W., Z. Naturforsch., **5A**, 89 (1950).
46. Fucks W., Z. Physik, **137**, 49 (1954).
47. Agostini L., Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., London, 1948, т. 2, стр. 56.
48. Werner F. D., Rev. Sci. Instr., **21**, 61 (1950).
49. Kolin A., Proc. Soc. Exp. Biol. Med., **35**, 53 (1936).
50. Thürlemann B., Helv. Phys. Acta, **14**, 383 (1941).
51. Kolin A. and Reiche F., J. Appl. Phys., **25**, 409 (1954).
52. Kolin A., Rev. Sci. Instr., **16**, 109 (1945).
53. Grossman L. M. and Shay E. A., Mech. Eng., **71**, 744 (1949).
54. Grossman L. M. and Charwatt A. F., Rev. Sci. Instr., **23**, 741 (1952).
55. Gaffyn J. E. and Underwood R. M., Nature, **169**, 239 (1952).
56. Van Driest E. R., J. Appl. Mechanics, **12**, A91 (1945).
57. Kalinske A. A. and Pien C. L., Ind. Eng. Chem., **36**, 220 (1944).
58. Kampé de Fériet J., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 352.

59. Liepmann H. W. and Robinson M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3037 (1953).
60. Townend H. C. H., Proc. Roy. Soc. London, **145A**, 180 (1934).
61. Fage A. and Townend H. C. H., Proc. Roy. Soc. London, **135A**, 656 (1932).
62. Taylor M. K., Mech. Eng., **72**, 658 (1950).
63. Collins R. D. and Newby M. P., Nature, **162**, 224 (1948).
64. Frenkiel F. N., Compt. rend., **22**, 1331 (1946).
65. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., General Discussion on Heat Transfer, Proc. Inst. Mech. Engrs., London, 188 (1951).
66. Leaf W., Mech. Eng., **67**, 586 (1945).
67. Leaf W. and Atchinson L. C., J. Phys. & Colloid Chem., **53**, 957 (1949).
68. Weller R., J. Appl. Mechanics, **14**, 103A (1947).
69. Ulliyot T., Trans. ASME, **69**, 245 (1947).
70. Kovaszny L. S. G., Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst., Berkeley, Calif., 1949, стр. 211.
71. Uberoi M. S. and Kovaszny L. S. G., J. Appl. Phys., **26**, 19 (1955).
72. Hubbard J. C., Fitzpatrick J. A., Thaler W. J., Cheng L. and Beeber R. J., Phys. Rev., **74**, 708 (1948).
73. Glaser A. H., J. Sci. Instr., **29**, 219 (1952).
74. Bourot J. M., Publ. sci. et tech. ministère air France, № 226, 1949.
75. Goldstein S., Proc. Roy. Soc. London, **155A**, 570 (1936).
76. Young A. D. and Maas J. N., Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem., № 1770, 1937.
77. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., Appl. Sci. Research, **1A**, 435 (1949).
78. Alexander L. G., Baron T. and Comings E. W., Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Tech. Rept., № 8, 1950.
79. Tucker M. J., J. Sci. Instr., **29**, 327 (1952).
80. Burgers J. M., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 1222 (1948).
81. Skinner G. T., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3682, 1956.
82. Laufer J. and McClellan R., J. Fluid Mech., **1**, 276 (1956).
83. Cooper R. D. and Tulin M. P., AGARDograph, № 12, 1955.
84. Lighthill M. J., Proc. Roy. Soc. London, **224A**, 1 (1954).
85. Janssen J. M. L., Ensing L. and van Erp J. B., Proc. Inst. Radio Engrs., **47**, 555 (1959).
86. Ling S. C. and Hubbard P. G., J. Aeronaut. Sci., **23**, 890 (1956).

К главе 3

1. Robertson H. P., Proc. Cambridge Phil. Soc., **36**, 209 (1940).
2. Kármán Th. and Howarth L., Proc. Roy. Soc. London, **164A**, 192 (1938).
3. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., Recherche aéronaut., № 32, стр. 21, 1953.
4. Stewart R. W., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 146 (1951).
5. Loitsianskii L. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1079, 1945. (Лойцянский Л. Г., Труды ЦАГИ, вып. 440, 1939.)
6. Agostini L. and Bass J., Publ. sci. et tech. ministère air, № 237, 1950.
7. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **194A**, 527 (1948).
8. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc. London, **195A**, 513 (1949).
9. Kármán Th., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., **34**, 530 (1948).
10. Колмогоров А. Н., ДАН СССР **30**, 299—303 (1941); **32**, 19—21 (1941).

11. Batchelor G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, New York, 1953. (Имеется русск. перевод: Бэтчелор Дж., *Теория однородной турбулентности*, ИЛ, Москва, 1955.)
12. Kármán Th. and Lin C. C., *Advances in Appl. Mechanics*, 2, 1 (1951).
13. Обухов А. М., *ДАН СССР*, 32, 22—24, 1941.
14. Kovasznay L. S. G., *J. Aeronaut. Sci.*, 15, 745 (1948).
15. Heisenberg W., *Z. Physik*, 124, 628 (1948).
16. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc. London*, 200A, 20 (1949). Также *Phys. Rev.*, 75, 896 (1949).
17. Stewart R. W. and Townsend A. A., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 243A, 359 (1951).
18. Proudman I., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47, 158 (1951).
19. Sato H., *J. Phys. Soc. Japan*, 6, 387 (1951); 7, 392 (1952).
20. Liepmann H. W., Laufer J. and Liepman K., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 2473, 1951.
21. Batchelor G. K. and Townsend A. A., *Proc. Roy. Soc. London*, 193A, 539 (1948).
22. Batchelor G. K. and Townsend A. A., *Proc. Roy. Soc. London*, 190A, 534 (1947).
23. Lin C. C., *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 34, 760 (1948).
24. Rotta J., *Ingr-Arch.*, 18, 60 (1950).
25. Frenkiel F. N., *J. Appl. Mecanics*, 15, 311 (1948).
26. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C. and Skramstad H. K., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts.*, № 581, 1937.
27. Hall A. A., *Aeronaut. Research Comm. Repts. & Mem.*, № 1842, 1938.
28. Baines W. D. and Peterson E. G., *Trans. ASME*, 73, 467 (1951).
29. Proudman I. and Reid W. H., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 247A, 926 (1954).
30. Batchelor G. K. and Townsend A. A., *Proc. Roy. Soc. London*, 199A, 238 (1949).
31. Обухов А. М., *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.*, 13, 58—69 (1949).
32. Яглом А. М., *ДАН СССР*, 69, 743—746 (1949).
33. Corrsin S., *J. Aeronaut. Sci.*, 18, 417 (1951).
34. Corrsin S., *J. Appl. Phys.*, 22, 469 (1951).
35. Kistler A. L., O'Brien V. and Corrsin S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Research Mem.*, RM 54D19, 1954.
36. Обухов А. М., *ДАН СССР*, 66, 17—20 (1949).
37. Batchelor G. K., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47, 359 (1951).
38. Limber D. N., *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 37, 230 (1951).
39. Uberoi M. S., *J. Aeronaut. Sci.*, 20, 197 (1953).
40. Uberoi M. S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 3116, 1954.
41. Krzywoblocki M. Z. E., *Proc. 1st U. S. Natl. Conf. Appl. Mech.*, стр. 827, 1951.
42. Krzywoblocki M. Z. E., *Proc. 2d Midwest. Conf. Fluid Dynamics*, стр. 35, 1952.
43. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc. London*, 210A, 18 (1951).
44. Lighthill M. J., *Gas Dynamics of Cosmic Clouds*, стр. 121, Symposium, Cambridge, England, 1953.
45. Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc. London*, 211A, 564 (1952); 222A, 1 (1954).
46. Proudman I., *Proc. Roy. Soc. London*, 214A, 119 (1952).
47. Onsager L., *Phys. Rev.*, 68, 286 (1945).
48. Weizsäcker G. F., *Z. Physik*, 124, 628 (1948); *Proc. Roy. Soc. London*, 195A, 402 (1948).
49. Reid W. H., *Quart. Appl. Math.*, 14, 201 (1956).

50. Batchelor G. K. and Proudman I., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **248A**, 369 (1956).
51. Tsuji H., *J. Phys. Soc. Japan*, **11**, 1096 (1956).
52. Townsend A. A., *Proc. Roy. Soc. London*, **208A**, 534 (1951).
53. Grant H. L. and Nisbet I. C. T., *J. Fluid Mech.*, **2**, 263 (1957).
54. Van der Hegge Zijnen B. G., *Appl. Sci. Research*, **7A**, 149 (1958).
55. Chou P., *Quart. Appl. Math.*, **3**, 38 (1945).
56. Deissler R. G., *Physics of Fluids*, **1**, 111 (1958).
57. Burgers J. M., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **53**, 122 (1950).
58. Batchelor G. K., *J. Fluid Mech.*, **5**, 113 (1959).
59. Batchelor G. K., Howells J. D. and Townsend A. A., *J. Fluid Mech.*, **5**, 134 (1959).

К главе 4

1. Batchelor G. K., *Proc. Roy. Soc. London*, **186A**, 480 (1946).
2. Chandrasekhar S., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **242A**, 557 (1950).
3. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc. London*, **203A**, 358 (1950).
4. Burgers J. M. and Mitchner M., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **56**, 228, 343 (1953).
5. Rotta J., *Z. Physik*, **129**, 547 (1951).
6. Tchen C. M., *J. Research Natl. Bur. Standards*, **50**, 51 (1953).
7. Batchelor G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, New York, 1953. (Имеется русск. перевод. См. литературу к гл. 3 [1].)
8. Klebanoff P. S. and Diehl Z. W., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 2475, 1951.
9. Laufer J., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts.*, № 1174, 1954.
10. Craya A. and Milliat J. P., *Compt. rend.*, **241**, 587 (1955).
11. Tchen C. M., *Phys. Rev.*, **93**, 4 (1954).

К главе 5

1. Prandtl L., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **5**, 136 (1925). См. также: Goldstein S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, т. 1, стр. 205, Oxford University Press, New York, 1938. (Имеется русск. перевод: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. 1, Москва, 1948.)
2. Prandtl L., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **22**, 241 (1942).
3. Taylor G. I., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **215A**, 1 (1915).
4. Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc. London*, **135A**, 685 (1932).
5. Kármán Th., *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-phys. Kl.*, **58** (1930).
6. Kármán Th., *J. Aeronaut. Sci.*, **4**, 131 (1937).
7. Reichardt H., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **21**, 257 (1941).
8. Reichardt H., *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, № 414, 1951. См. также Oudart A., *Publ. sci. et tech. ministère air*, № 234, 1949.
9. Барон Т., доклад, представленный в А. И. Ч. Е., Tulsa, Okla., May 8—12, 1949.
10. Schultz B. H., *Appl. Sci. Research*, **1A**, 387, 400 (1949).
11. Alexander L. G., Барон Т. and Comings E. W., *Univ. Illinois Bull.*, № 413, 1953.
12. Nusselt W., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **10**, 105 (1930).
13. Eckert E. and Lieblein V., *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, **16B**, 33 (1949).
14. Prandtl L., *Physik. Z.*, **29**, 487 (1928).
15. Burgers J. M., конспект лекций, California Institute of Technology, Pasadena, 1951.

16. Batchelor G. K., Australian J. Sci. Research, 2, 437 (1949).
17. Batchelor G. K., Proc. Cambridge Phil. Soc., 48, 345 (1952).
18. Batchelor G. K., Inst. Fluid Dynamics and Appl. Math., Lecture Ser., № 4, University of Maryland, College Park, 1951.
19. Taylor G. I., Proc. London Math. Soc., 20, 196 (1921).
20. Richardson L. F., Proc. Roy. Soc. London, 110A, 709 (1926).
21. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc. London, 213A, 349 (1952).
22. Reid W. H., Proc. Cambridge Phil. Soc., 51, 350 (1955).
23. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, 209A, 418 (1951).
24. Ertel H., Z. Meteorol., 59, 277 (1942).
25. Batchelor G. K. and Townsend A. A., в книге Batchelor G. K. and Daires R. M. (ред.), Surveys in Mechanics, стр. 352, Cambridge University Press, New York, 1956.
26. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc. London, 229A, 1 (1955).
27. Frenkiel F. N., Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech., London, т. 2, стр. 112, 1948.
28. Uberoi M. S. and Corrsin S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1142, 1953.
29. Batchelor G. K. and Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, 190A, 534 (1947).
30. Mickelsen W. R., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3570, 1955.
31. Carslaw H. S. and Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, стр. 223, Clarendon Press, Oxford, 1947.
32. Frenkiel F. N., Symposium on Turbulence, Naval Ord. Lab. Rept., № 1136, стр. 67, July, 1949.
33. Frenkiel F. N., Proc. 1st. U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., стр. 837, 1951.
34. Frenkiel F. N., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 38, 509 (1952).
35. Frenkiel F. N., Advances in Applied Mechanics, т. 3, стр. 51, Academic Press, New York, 1953.
36. Fleishman B. A. and Frenkiel F. N., J. Meteorol., 12, 141 (1955).
37. Kampé de Fériet J., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 352.
38. Kalinske A. A. and Pien C. L., Ind. Eng. Chem., 36, 220 (1944).
39. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, 224A, 487 (1954).
40. Taylor G. I., Proc. Roy. Soc. London, 151A, 421 (1935).
41. Towle W. L. and Sherwood T. K., Ind. Eng. Chem., 31, 457 (1939).
42. McCarter R. J., Stutzman L. F. and Koch H. A., Jr., Ind. Eng. Chem., 41, 1290 (1949).
43. Sherwood T. K. and Woertz B. B., Ind. Eng. Chem., 31, 1034 (1939).
44. Dryden H. L., Ind. Eng. Chem., 31, 416 (1939).
45. Corrsin S. and Uberoi M. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1040, 1951.
46. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., General Discussion on Heat Transfer, стр. 188, Institute of Mechanical Engineering, London, 1951.
47. Lauwerier H. A., Appl. Sci. Research, 4A, 153 (1954).
48. Hinze J. O., J. Aeronaut. Sci., 18, 565 (1951).
49. Kendall M. G., The Advanced Theory of Statistics, т. 1, Griffin & Co., London, 1947.
50. Townsend A. A., Australian J. Sci. Research, 2A, 451 (1949).
51. Bagnold R. A., Proc. Roy. Soc. London, 225A, 49 (1954).
52. Bagnold R. A., Phil. Trans. Roy. Soc. London, 249A, 235 (1956).

53. Tchen C. M., Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid, автореферат диссертации, Delft, 1947.
54. Hughes R. R. and Gilliland E. R., Chem. Eng. Progr., **48**, 497 (1952).
55. Corrsin S. and Lumley J., Appl. Sci. Research, **6A**, 114 (1956).
56. Schmidt W., Der Massenaustausch in freier Luft, стр. 18, Henri Grand Verlag, Hamburg, 1925.
57. Schultz-Grunow F., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **17**, 65 (1951).
58. Ryan L. F., Experiments on Aerodynamic Cooling, Mitl. Inst. Aerodyn. E. T. H. Zurich, № 18, 1951.
59. R an que M. G., J. phys. radium, **4**, 112 (1933).
60. Hilsch R., Z. Naturforsch., **1**, 208 (1946).
61. Deemter J. J., Appl. Sci. Research, **3A**, 174 (1953).
62. Spalding D. B., Proc. Roy. Soc. London, **221A**, 78, 100 (1954).
63. Schuh H., Z. angew. Math. u. Mech., **25—27**, 54 (1947).
64. Mickley H. S., Ross R. C. and Squyers A. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3208, 1954.
65. Basset A. B., A Treatise on Hydrodynamics, т. 2, ч. 5, Deighton, Bell and Co., Cambridge, England, 1888.
66. Boussinesq J., Théorie analytique de la chaleur, т. 2, стр. 224, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
67. Oseen C. W., Hydrodynamik, стр. 132, Leipzig, 1927.
68. Corrsin S., конспект лекций, APL (JHU-TG-63-29), стр. 49, Johns Hopkins University, Baltimore, Md., 1953.
69. Lumley J. L., Some Problems Connected with the Motion of Small Particles in Turbulent Fluid, автореферат диссертации, Johns Hopkins University, Baltimore, 1957.
70. Friedlander S. K., A. I. Ch. E. Journal, **3**, 381 (1957).

К главе 6

1. Reichardt H., Forsch. Gebiete Ingenieurw., № 414, 1951.
2. Goldstein S., Modern Developments in Fluid Dynamics, т. 2, Clarendon Press, Oxford, 1938. (См. также: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. II, Москва, 1948.)
3. Schlichting H., Ingr. Arch., **1**, 533 (1930).
4. Fage A. and Falkner V. M., Proc. Roy. Soc. London, **135A**, 702 (1935).
5. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **190A**, 551 (1947).
6. Townsend A. A., Australian J. Research, **2A**, 451 (1949).
7. Townsend A. A., Proc. Roy. Soc. London, **197A**, 124 (1949).
8. Townsend A. A., Australian J. Research, **1A**, 161 (1948).
9. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, New York, 1956. (Имеется русск. перевод: Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, ИЛ, Москва, 1959.)
10. Tollmien W., Z. angew. Math. u. Mech., **6**, 468 (1926).
11. Squire H. B. and Truncer J., Brit. Aeronaut. Research Comm. Tech. Repts., № 1947, 1944.
12. Pai S. I., Quart. Appl. Math., **10**, 141 (1938).
13. Howarth L., Proc. Cambridge Phil. Soc., **34**, 185 (1938).
14. Forstall W., Jr., Material and Momentum Transfer in Coaxial Gas Streams, автореферат диссертации, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1949.
15. Forstall W., Jr. and Shapiro A. H., J. Appl. Mechanics, **17**, 399 (1950).

16. Forstall W., Jr. and Shapiro A. H., *J. Appl. Mechanics*, **18**, 219 (1951).
17. Acharya Y. V. G., *Momentum Transfer and Heat Diffusion in the Mixing of Coaxial Turbulent Jets Surrounded by a Pipe*, автореферат диссертации, Delft, 1954.
18. Landis F. and Shapiro A. H., *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst.*, Palo Alto, Calif., 1951, стр. 133.
19. Trüpel Th., *Z. ges. Turbinenwesen*, **12**, 52 (1915).
20. Ruden P., *Naturwissenschaften*, **21**, 52 (1915).
21. Corrsin S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Wartime Repts.*, № 94, 1943.
22. Corrsin S. and Uberoi M. S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 1865, 1949.
23. Corrsin S. and Uberoi M. S., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 2124, 1950.
24. Hinze J. O. and van der Hegge Zijnen B. G., *Appl. Sci. Research*, **1A**, 435 (1949).
25. Albertson M. L., Dai Y. B., Jenson R. A. and Rouse H., *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, **74**, 1571 (1948).
26. Forstall W. and Gaylor E. W., *J. Appl. Mechanics*, **22**, 161 (1955).
27. Keagy W. R. and Weller A. E., *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst.*, Berkeley, Calif., 1949, стр. 89.
28. Alexander L. G., Baron T. and Comings E. W., *Univ. Illinois Bull.*, № 413, 1953.
29. Corrsin S. and Kistler A. L., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 3133, 1954.
30. Liepmann H. W. and Laufer J., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 1257, 1947.
31. Laurence J. C., *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes*, № 3561, 1955.
32. Chin W. C. and Rib L. N., *Trans. Am. Geophys. Union*, **37**, 13 (1956).
33. Van der Hegge Zijnen B. G., *Appl. Sci. Research*, **7A**, 293 (1958).
34. Alexander L. G., Kivnick A., Comings E. W. and Henze E. D., *A. J. Ch. E. Journal*, **1**, 55 (1955).
35. Phillips O. M., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **51**, 220 (1955).
36. Stewart R. W., *J. Fluid Mech.*, **1**, 593 (1956).
37. Barat M., *Compt. rend.*, **238**, 445 (1954).
38. Szablewski W., *Ingr. Arch.*, **20**, 567, 573 (1952).
39. Keagy W. R. and Weller A. E., *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst.*, Berkeley, Calif., 1949, стр. 89.
40. Sunavala P. D., Hulse C. and Thring M. W., *Combustion and Flame*, **1**, 179 (1957).
41. Thring M. W. and Newby M. P., *4th Symposium on Combustion*, стр. 789, Cambridge, Mass., 1952. (См. Вопросы горения и детонационных волн. Четвертый симпозиум по вопросам горения и детонационных волн, Оборонгиз, М., 1958.)
42. Tomotika S., *Proc. Roy. Soc. London*, **165A**, 65 (1938).
43. Miller D. R. and Comings E. W., *J. Fluid Mech.*, **3**, 1 (1957).
44. Kobashi Y., *J. Phys. Soc. Japan*, **12**, 533 (1957).

К главе 7

1. Goldstein S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, т. 2, стр. 331, Oxford University Press, New York, 1938. (См. литературу к гл. 5, [1], т. II.)
2. Wieghardt K., *Автореферат диссертации*, University of Göttingen, 1945.
3. Schubauer G. B. and Skramstad H. K., *J. Aeronaut. Sci.*, **14**, 69 (1947).

4. Dryden H. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 1168, 1947.
5. Blasius H., Z. Math. u. Physik, **56**, 4 (1908).
6. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 361, 1933.
7. Millikan C. B., Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938, стр. 386.
8. Kármán Th., Trans. ASME, **61**, 705 (1939).
9. Hofmann E., Forsch. Gebiete Ingenieurw., **11A**, 159 (1940).
10. Reichardt H., Z. angew. Math. u. Mech., **20**, 297 (1940).
11. Rotta J., Ingr. Arch., **18**, 277 (1950)
12. Reichardt H., Z. angew. Math. u. Mech., **31**, 208 (1951).
13. Deissler R. G., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3145, 1954.
14. Schlichting H., Boundary Layer Theory, Pergamon Press Ltd., London, 1955. (Имеется русск. перевод: Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, Москва, 1956.)
15. Ludwig H. and Tillmann W., Ingr. Arch., **17**, 288 (1949).
16. Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1030, 1951.
17. Klebanoff P. S. and Diehl F. W., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2475, 1951.
18. Schultz-Grunow F., Luftfahrt-Forsch., **17**, 239 (1940).
19. Allan J. F. and Cutland R. S., Trans. North East Coast Inst. Engrs. & Shipbuilders, **69**, 245 (1953).
20. Hama F. R., Soc. Naval Architects Marine Engrs. Trans., **62**, 333 (1954).
21. Clauser F. H., Advances in Appl. Mechanics, **4**, 1 (1956).
22. Wieghardt K., Z. angew. Math. u. Mech., **25—27**, 146 (1947).
23. Goethals R., Compt. rend., **226**, 1073 (1948).
24. Miles J. W., J. Aeronaut. Sci. **24**, 704 (1957).
25. Elrod H. G., J. Aeronaut. Sci., **24**, 468 (1957).
26. Driest E. R., J. Aeronaut. Sci., **23**, 1007 (1956).
27. Klebanoff P. S., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 3178, 1954.
28. Townsend A. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 375 (1951).
29. Corrsin S. and Kistler A. L., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 3133, 1954.
30. Schubauer G. B., J. Appl. Phys., **25**, 188 (1954).
31. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, New York, 1956. (См. литературу к гл. 6 [6].)
32. Kuehle A. M., J. Aeronaut. Sci., **23**, 444 (1956).
33. Favre A., Gaviglio J. and Dumas R., 9th Intern. Congr. Appl. Mechanics, Brussels, 1956; также J. Fluid Mech., **3**, 329 (1958).
34. Einstein H. A. and Li H., Proc. Am. Soc. Civil Engrs. Paper, № 945, 1956.
35. Hanratty T. J., AIChE Journal, **2**, 359 (1956).
36. Coles D., J. Fluid Mech., **1**, 191 (1956).
37. Latzko H., Z. angew. Math. u. Mech., **1**, 277 (1921).
38. Kirsten H., Experimental Investigation on the Development of the Velocity Distribution in Turbulent Pipe Flow, автореферат диссертации, University of Leipzig, 1927.
39. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 356, 1932.
40. Nikuradse J., VDI-Forschungsheft, № 361, 1933.
41. Laufer J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Repts., № 1174, 1954.
42. Nunner W., VDI-Forschungsheft, № 455, 1956.
43. Laufer J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 2123, 1950.
44. Elias F., Z. angew. Math. u. Mech., **9**, 434 (1929); **10**, 1 (1930).

45. Woertz B. B. and Sherwood T. K., *Trans. AIChE*, **35**, 517 (1939).
 46. Lorenz H., *Z. tech. Phys.*, **15**, 376 (1934).
 47. McCarter R. J., Stutzman L. F. and Koch H. A., Jr., *Ind. Eng. Chem.*, **41**, 1290 (1949).
 48. K á r m á n Th., *Trans. ASME*, **61**, 705 (1939).
 49. Kraussold H., *VDI-Forschungsheft*, № 351, 1931.
 50. Rannie W. D., *J. Aeronaut. Sci.*, **23**, 485 (1956).
 51. McAdams W. H., *Heat Transmission*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954. (См. литературу к гл. 2 [1].)
 52. Page F., Jr., Schlinger W. G., Breaux D. K. and Sage B. H., *Ind. Eng. Chem.*, **44**, 424 (1952).
 53. Isakoff S. E. and Drew T. B., *Proc. General Discussion on Heat Transfer*, стр. 405, 479, New York, 1951.
 54. Pohl W., *Forsch. Gebiet. Ingenieurw.*, **4A**, 230 (1933).
 55. Smith J. W. and Epstein N., *A. I. Ch. E. Journal*, **3**, 242 (1957).
 56. Reiher H., *Mitt. Forsch.*, **269**, 1 (1925).
 57. Лойцянский Л. Г. и Шваб Б. А., *Труды ЦАГИ*, № 329, 1935.
 58. Comings E. W., Clapp J. T. and Taylor J. F., *Ind. Eng. Chem.*, **40**, 1096 (1948).
 59. De Haas van Dorsser A. H., Leniger H. A. and van Meel D. A., *De Ingenieur*, **61**, № 25 (1949).
 60. Maisel D. S. and Sherwood T. K., *Chem. Eng. Progr.*, **46**, 172 (1950).
 61. Sherwood T. K. and Petrie J. M., *Ind. Eng. Chem.*, **24**, 736 (1932).
 62. Sato K. and Sage B. H., *ASME Paper*, № 57-A-20.
 63. Van der Hegge Zijnen B. G., *Appl. Sci. Research*, **7A**, 205 (1958).
 64. Edwards A. and Furber B. N., *Proc. Inst. Mech. Engrs. London*, **170**, 941 (1956).
 65. Lobb R. K., Winkler E. M. and Persh J., *J. Aeronaut. Sci.*, **22** (1955).
 66. Koch R., *VDI-Forschungsheft*, № 469, 1958.
 67. Goddard F. E., *J. Aero. Space Sci.*, **26**, 1 (1959).
-

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Агостини (Agostini L.) 149, 193, 663, 664
Александр (Alexander L. G.) 164, 165, 342, 488, 491, 493, 664, 666, 669
Аллен (Allan J. F.) 551, 670
Альбертсон (Albertson M. L.) 491, 669
Атчinson (Atchinson L. C.) 664
Ачария (Acharya Y. V. G.) 488, 669
- Бай (Pai S. I.) 483, 501, 668
Бара (Barat M.) 498, 499, 669
Бассэ (Basset A. B.) 414, 668
Бетхов (Betchov R.) 108, 109, 117, 132, 662, 663
Бибер (Beeber R. J.) 664
Блазиус (Blasius H.) 537, 670
Бро (Breaux D. K.) 671
Буро (Bourot J. M.) 155, 664
Буссинеск (Boussinesq J.) 31, 36, 311, 324, 339, 348, 414, 661, 668
Бэгнольд (Bagnold R. A.) 412, 413, 667
Бэйнес (Baines W. D.) 255, 665
Бэрон (Baron T.) 164, 342, 343, 491, 493, 664, 666, 669
Бэсс (Bass J.) 193, 230, 664
Бэтчелор (Batchelor G. K.) 68, 190, 192, 195, 208, 210, 214, 227, 229, 242, 248, 249, 254—257, 276, 277, 284, 287, 293, 307, 344, 360, 362, 363, 365, 366, 369, 370, 371, 381, 392, 393, 398, 406, 469, 661, 664—667
Бюргерс (Burgers J. M.) 16, 87, 88, 104, 232, 294, 301, 306, 315, 355, 372, 661, 662, 664, 666
- Ван дер Хегге Цийнен (van der Hegge Zijnen) 95, 111, 157, 164, 255, 401, 402, 405, 407, 411, 491—493, 495—497, 505, 643—645, 662—664, 666, 667, 669, 671
Ван Драйст (van Driest E. R.) 547, 663, 670
Ван Меэль (van Meel D. A.) 642, 671
Вейцзэкер (Weizsäcker G. F.) 225, 665
Вернер (Werner F. D.) 149, 663
Вернотт (Vernotte P.) 147, 663
Вёрц (Woertz B. B.) 400, 624, 667, 671
Веске (Weske J. R.) 144, 145, 663
Виатт (Wyatt L. A.) 146, 663
Вигхардт (Wieghardt K.) 532, 555, 669, 670
Винклер (Winkler E. M.) 646, 647, 671
- Гавильо (Gaviglio J.) 179, 571, 662, 664, 670
Гарсайд (Garside J. E.) 661
Гаффин (Gaffyn J. E.) 663
Гейзенберг (Heisenberg W.) 226, 227, 230, 238, 246, 250, 251, 283, 665
Гейлорд (Gaylord E. W.) 491, 497, 669
Генце (Henze E. D.) 488, 491, 669
Гёртлер (Görtler H.) 87, 662
Гёталс (Goethals R.) 558, 670
Глэзер (Glaser A. H.) 161, 162, 664
Годдард (Goddard F. E.) 648, 671
Гольдштейн (Goldstein S.) 164, 664, 666, 668, 669
Гофман (Hofmann E.) 545, 546, 627, 628, 670
Грант (Grant H. L.) 254, 666
Гроссман (Grossmann L. M.) 253, 663
Гулд (Gould R. W. F.) 663
- Дай (Dai I. B.) 491, 669
Дайслер (Deissler R. G.) 190, 547, 553, 630, 631, 666, 670
Джеффрис (Jeffreys B. S.) 661

- Джеффрис (Jeffreys H.) 661
 Джиллиленд (Gilliland E. R.) 415, 668
 Джинс (Jeans J. H.) 57, 661
 Диль (Diehl F. W.) 317, 320, 551, 552, 555—557, 666, 670
 Димтер (Deemter J. J.) 668
 Драйден (Dryden H. L.) 13, 68, 106, 255, 536, 661—663, 665, 667, 670
 Древиц (Drewitz O.) 124, 662
 Дрю (Drew T. B.) 635, 636, 671
 Дуб (Doob J. L.) 68, 661
 Дэйрс (Daires R. M.) 667
 Люма (Dumas R.) 179, 581, 662, 664, 670

 Егер (Jaeger J. C.) 380, 667

 Исаков (Isakoff S. E.) 635, 636, 671
 Йенсон (Jenson R. A.) 491, 669

 Калинске (Kalinske A. A.) 68, 164, 390, 661, 663, 667
 Камингс (Comings E. W.) 342, 488, 491, 493, 499, 642, 664, 666, 669, 671
 Кампé де Ферье (Kampé de Fériet J.) 62, 80, 390, 661—663, 667
 Карман (Kármán Th.) 9—11, 68, 171, 178, 189, 214, 222, 228, 241, 248, 252, 333—335, 337, 339, 538, 541, 545, 627, 628, 661, 662, 664—667, 670, 671
 Карслоу (Carslow H. S.) 380, 667
 Катленд (Cutland R. S.) 551, 670
 Кендалл (Kendall M. G.) 667
 Кивник (Kivnick A.) 488, 491, 669
 Киджи (Keagy W. R.) 495, 500, 669
 Кинг (King L. V.) 97, 141, 662
 Кирстен (Kirsten H.) 594, 670
 Кистлер (Kistler A.) 259, 282, 501, 509, 515, 517, 518, 563—565, 570, 571, 665, 669, 670
 Клаузер (Clauser F. H.) 552, 555, 556, 561, 583, 590, 670
 Клебанов (Klebanoff P. S.) 127, 317, 320, 551, 552, 555—557, 564, 565, 567, 570, 571, 573, 574, 578, 580, 587, 588, 592, 602, 608, 662, 663, 666, 670
 Клэпп (Clapp J. T.) 642, 671
 Кобаши (Kobachi Y.) 466, 669
 Коважный (Kavaszny L. S. G.) 123, 145, 159, 160, 226, 662—665
 Колин (Kolin A.) 153, 663
 Коллинз (Collins R. D.) 156, 664
 Коллис (Collis D. C.) 146, 663
 Колмогоров А. Н. 214, 217, 220, 225, 664
 Кольбурн 626
 Корсин (Corrsin S.) 55, 118, 141, 259, 275, 282, 375, 378, 379, 394, 401, 402, 413, 416, 491, 495, 499, 501—507, 509, 515—518, 563—565, 570, 571, 661—663, 665, 667—670
 Коулс (Coles D.) 585—588, 670
 Кох Г. А. (Koch H. A.) 399, 625, 667, 671
 Кох (Koch R.) 640, 641, 671
 Крайя (Craya A.) 317, 320, 666
 Крамерс (Kramers H.) 95, 97, 662
 Крауссольд (Kraussold) 628, 671
 Купер (Cooper R. D.) 127, 664
 Куэтт (Couette M.) 86
 Кшивоблоцкий (Krzywoblocki M. Z. E.) 289, 665
 Кьюз ((Kuethe A. M.) 13, 106, 647, 662, 670

 Лайтхилл (Lighthill M. J.) 147, 290, 664, 665
 Ламб (Lamb H.) 662
 Ламли (Lumley J.) 413, 416, 668
 Лауренс Дж. К. (Laurence J. C.) 501, 669
 Лауренс Дж. П. (Laurence J. P.) 663
 Лауфер (Laufer J.) 123, 124, 135, 317—319, 501, 553, 554, 595, 597, 600—603, 606, 608—614, 616, 663—666, 669, 670
 Лацко (Latzko H.) 593, 594, 670
 Ленигер (Leniger H. A.) 642, 671
 Ли (Li H.) 238, 584, 670
 Либлайн (Lieblein V.) 353, 666
 Лимбер (Limber D. N.) 284, 665
 Линг (Ling S. C.) 147, 148, 664
 Линдвалл (Lindvall F. C.) 148, 149, 663
 Линдгрэн (Lindgren E. R.) 87, 88, 662
 Линь (Lin C. C.) 55, 87, 88, 214, 222, 248, 252, 661, 662, 665
 Липман (Lipmann H. W.) 135, 136, 240, 501, 663—665, 669
 Лиф (Leaf W.) 664
 Лобб (Lobb R. K.) 646, 647, 671
 Ловерье (Lauverier H. A.) 401, 667
 Лойцянский Л. Г. 191, 192, 642, 664, 671
 Лорансо (Laurenceau P.) 144, 663
 Лорентц (Lorentz) 85, 86

- Лоренц (Lorenz H.) 624, 671
 Лоуэлл (Lowell H. H.) 108, 111, 123, 662
 Лэндес (Landes L.) 663
 Лэндис (Landis F.) 491, 669
 Людвиг (Ludwig H.) 551, 552, 560, 562, 670
- Маас** (Maas J. N.) 664
 Майзель (Maisel D. S.) 642, 671
 Майлс (Miles J. W.) 546, 670
 Мак-Адамс (McAdams W. H.) 95, 662, 671
 Мак-Картер (McCarter R. J.) 399, 625, 667, 671
 Мак-Клеллан (McClellan R. J.) 123, 124, 664
 Мидлбрук (Middlebrook G. B.) 147, 663
 Мизес (Mises R.) 662
 Мик (Mick W. C.) 661
 Микельсен (Mickelsen W. R.) 379, 667
 Микли (Mickley H. S.) 353, 668
 Миллер (Miller D. R.) 499, 669
 Милья (Milliat J. P.) 317, 320, 666
 Милликен (Millikan C. B.) 543, 559, 597, 670
 Митчнер (Mitchner M.) 294, 301, 306, 315, 666
 Мок (Mock W. C.) 662, 663, 665
 Мунк (Munk M.) 88, 662
- Никурадзе** (Nikuradse J.) 538, 553, 560, 561, 594, 597, 598, 670
 Нисбет (Nisbet I. C. T.) 254, 666
 Нуннер (Nunner W.) 600, 606, 619, 620, 639—641, 670
 Нуссельт (Nusselt W.) 353, 666
 Ньюбай (Newby M. P.) 156, 500, 664, 669
- О'Брайен** (O'Brien V.) 259, 282, 665
 Обухов А. М. 225, 226, 229, 284, 665
 Обэ (Huebès J. J.) 144, 663
 Озеен (Oseen C. W.) 414, 668
 Онзагер (Onsager L.) 225, 665
 Опп (Opp W. M. F.) 86, 662
 Оссовский (Ossofsky E.) 144, 145, 663
- Пейдж** (Page F.) 635, 636, 671
 Перш (Persh J.) 646, 647, 671
 Петерсон (Peterson E. G.) 255, 665
- Петри (Petrie J. M.) 671
 Пире (Piret E. L.) 147, 663
 Польш (Pohl W.) 638, 671
 Польшгаузен (Pohlhausen) 124
 Прандтль (Prandtl L.) 323, 324, 327, 329, 330, 333, 334, 335, 337, 339, 341, 350, 538, 542, 568, 626, 661, 666
 Праудмен (Proudman I.) 192, 208, 210, 211, 238, 239, 251, 252, 287, 290, 665, 666
 Пян (Pien C. L.) 68, 390, 667
- Райан** (Ryan L. F.) 668
 Райд (Reid W. H.) 208, 211, 238, 370, 665, 667
 Райхе (Reiche F.) 153, 663
 Райхер (Reiher H.) 642, 671
 Ранк (Ranque M. G.) 668
 Рейнольдс (Reinolds O.) 24, 30, 85, 86
 Рейхардт (Reichardt H.) 339, 341, 342, 491, 495, 545, 546, 553, 554, 595, 625, 628, 629, 633, 634, 666, 668, 670, 671
 Риб (Rib L. N.) 502, 669
 Ричардсон (Richardson E. G.) 663
 Ричардсон (Richardson L. F.) 366, 667
 Робертсон (Robertson H. P.) 171, 664
 Робинзон (Robinson M. S.) 136, 664
 Розенхэд (Rosenhead L.) 661
 Рой (Roy J.) 661
 Росс (Ross R. S.) 353, 668
 Ротта (Rotta J.) 251, 301, 545—547, 553, 560, 665, 666, 670
 Роуз (Rouse H.) 491, 669
 Руден (Ruden P.) 491, 495, 669
 Рэлей (Rayleigh) 86, 662
 Рэнни (Rannie W. D.) 632, 633, 671
- Сато** (Sato K.) 643, 671
 Сато (Sato H.) 239, 244, 255, 665
 Саттон (Sutton O. G.) 661
 Сеньерэн (Seigneurin A.) 144, 663
 Симмонс (Simmons L. F.) 663
 Сквайерс (Squyers A. L.) 353, 668
 Сквайр (Squire H. B.) 483, 484, 490, 668
 Скиннер (Skinner G. T.) 130, 664
 Скрэмстед (Skramstad H. K.) 113—115, 401, 402, 536, 661, 662, 665, 669
 Смит (Smith J. W.) 638, 671
 Сполдинг (Spalding D. B.) 353, 668
 Стюарт (Stewart R. W.) 170, 184, 231, 242, 246, 252, 516, 517, 664, 665, 669

- Сунавала (Sunavala P. D.) 500, 669
Сэйдж (Sage B. H.) 643, 671
- Такер (Tucker M. J.) 130, 664
Талер (Thaler W. J.) 664
Таул (Towle W. L.) 398, 399, 400, 667
Тауненд (Townend H. C.) 154, 664
Тауненд (Townend D. T. A.) 11, 661
Таунсенд (Townsend A. A.) 132—135, 170, 195, 214, 218, 231, 232, 234, 242, 243, 246, 252, 254—257, 277, 336—338, 344, 370, 371, 392—395, 398, 406, 408, 457—460, 462, 464—466, 468, 469, 505, 510, 514, 516, 518, 519, 552, 563, 564, 570, 574, 576, 582, 583, 589—591, 595, 609, 610, 614, 615, 663—668, 670
Тилман (Tillmann W.) 551, 552, 560, 562, 670
Титъенс (Tietjens O.) 661
Толмин (Tollmien W.) 479, 498, 668
Томас (Thomas P.) 148, 663
Томотика (Tomotika S.) 669
Траунсер (Trouncer J.) 483, 484, 490, 668
Тринг (Thring M. W.) 500, 669
Трюпель (Trüpel Th.) 491, 669
Тулин (Tulin M. P.) 127, 664
Турнье (Tournier M.) 144, 663
Тэйлор (Taylor G. I.) 9, 10, 52, 59, 60, 62, 68, 71, 76, 131, 195, 218, 323, 329, 331, 332, 339, 366, 397, 626, 642, 661, 662, 667
Тэйлор (Taylor J. F.) 671
Тэйлор (Taylor M. K.) 664
Тюрлеман (Thürlemann B.) 152, 663
- Удар (Oudart A.) 666
Ундервуд (Underwood R. M.) 663
Уэллер (Weller R. J.) 495, 500, 664, 669
Уэллинг (Welling W.) 117, 662
- Фавр (Favre A.) 56, 78, 129, 179, 581, 662, 664, 670
Фарбер (Furber B. N.) 645, 671
Фейдж (Fage A.) 154, 457, 460, 664, 668
Филлипс (Phillips O. M.) 516, 669
Фитцпатрик (Fitzpatrick J. A.) 664
Флайшман (Fleishman B. A.) 381, 387, 667
Флюгель (Flügel G.) 661
- Фокнер (Falkner V. M.) 457, 460, 668
Форстолл (Forstall W.) 488, 490, 491, 495, 497, 668, 669
Френкиль (Frenkiel F. N.) 70, 115, 157, 375, 380, 381, 387, 661, 662, 664, 665, 667
Фридлэндер (Friedlander S. K.) 413, 668
Фридрих (Friedrich) 624
Фукс (Fucks W.) 149, 150, 663
- Хаас ван Дорссер (De Haas van Dorsser A. N.) 671
Хаббард (Hubbard P. G.) 147, 148, 160, 664
Халс (Hulse C.) 500, 669
Хама (Hama F. R.) 551, 556, 558, 561, 585, 670
Харват (Charwatt A. F.) 663
Хауэлс (Howells I. D.) 277, 666
Хауэрт (Howarth L.) 171, 178, 189, 487, 664, 668
Хенретти (Hanratty T. Y.) 584, 585, 670
Хилш (Hilsch R.) 668
Хинце (Hinze J. O.) 157, 164, 401, 402, 407, 491, 495, 497, 664, 667, 669
Холл (Hall A. R.) 255, 661, 665
Хьюджес (Hughes R. R.) 415, 668
- Циглер (Ziegler M.) 144, 145, 663
Цуджи (Tsuji H.) 249, 252, 255, 666
- Чандрасекар (Chandrasekhar S.) 230, 251, 289, 290, 293, 373, 665—667
Чен (Tchen C. M.) 312, 314, 315, 317, 413, 414, 418, 420, 666, 668
Чжоу (Chou P.) 666
Чин (Chin W. C.) 306, 310, 311, 502, 669
- Шаблевский (Szablewski W.) 500, 669
Шапиро (Shapiro A. H.) 488, 491, 668, 669
Шваб Б. А. 642, 671
Шервуд (Sherwood T. K.) 398—400, 624, 633, 642, 667, 671
Шлингер (Schlinger W. G.) 671
Шлихтинг (Schlichting H.) 457, 459, 555, 668, 670
Шмидт (Schmidt W.) 668

- Штуцман (Stutzman L. F.) 399, 625, 667, 671
Шу (Schuh H.) 353, 668
Шубауэр (Schubauer G. B.) 127, 536, 551, 563, 564, 569, 580, 661—663, 665, 669, 670
Шульц (Schultz B. H.) 351, 666
Шульц-Грунов (Schultz-Grunow F.) 428, 551, 552, 556, 557, 668, 670
- Эдвардс (Edwards A.) 645, 671
Эйнштейн (Einstein H. A.) 584, 670
Эккерт (Eckert E.) 124, 353, 662, 666
Элиас (Elias F.) 619, 620, 670
- Элрод (Elrod H. G.) 546, 670
Энсайн (Ensing L.) 664
Эпштейн (Epstein N.) 638, 671
Эрп (Erp J. B.) 664
Эртель (Ertel H.) 33, 371, 662, 667
- Юберой (Uberoi M. S.) 160, 208, 284, 285, 288, 375, 378, 379, 394, 401, 402, 491, 495, 499, 501, 503, 505—507, 509, 661, 664, 665, 667, 669
- Яглом А. М. 665
Янг (Joung A. D.) 664
Янссен (Janssen J. M.) 664
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельность 170
— неполная 245
Аналогии при турбулентном переносе 344
Анемометр с коронным разрядом 149
— Линга и Хаббарда 147
— с нагретой пленкой 147
— с электрическим разрядом 148
- Бэрона теория 343
- Влияние сжимаемости 29, 123, 159, 289, 427, 646
— турбулентности свободного потока на процессы переноса в пограничном слое 641, 646
— шероховатости стенки на теплообмен 637
Вращение жидкости без деформации 26
Вырождение изотропного скалярного поля 279
— турбулентности 170, 195
— — изотропной 242
Вязкость вихревая 31, 33
— кажущаяся 31
— молекулярная 33
— турбулентная 31
- Гейзенберга гипотеза 231, 311
— закон 231, 234
Гипотеза Гейзенберга 231, 311
— Кармана о подобии 294
— Тэйлора 54
Грасгофа критерий 94
- Давление гидростатическое 25
— статическое осредненное, его изменение 160
- Давление турбулентное среднее 32
Движение см. *Течение*
Дилатация 26
Диссипация кинетической энергии 50
Диффузия 57
— дискретных частиц при однородной турбулентности 412
— от неподвижного источника в равномерном потоке 380
— — — в турбулентном потоке со сдвигом 400
— при однородной турбулентности 353
Длина «холодная» 108
- Завихренность движения 26
Закон вырождения турбулентности 282
— Гейзенберга 231, 234
— избыточной скорости 582
— спектральный Колмогорова 225, 240, 277
— Фика 584
- Измерение двойных корреляций скорости 127
— интенсивности турбулентности 125
— масштаба турбулентности 132
— осредненного статического давления 160
— осредненной скорости 163
— пульсаций концентрации 141
— — температуры 137
— спектра турбулентности 132
— тройных корреляций скорости 127
Изотропность локальная 169
Инвариант Лойцянского 192, 210, 244
Интеграл Лойцянского 192, 194, 222, 233

- Интенсивность турбулентности, ее измерение 125
 — — относительная 13
 — турбулентных пульсаций 13
- Кармана гипотеза подобия 294
 — формула 233
 Кармана—Хауэрта уравнение 189, 213, 250
 Квазипериодичность турбулентности 15
 Квазичастота 15
 Кинга формула 97
 Коважного формула 124
 Колмогорова закон спектральный 225, 234, 240, 242, 277
 Координаты цилиндрические 33
 Корреляция лагранжева 62, 64, 156
 — — временная 67
 — между компонентами скорости в фиксированной точке потока 39
 — между пульсациями давления и пульсациями скорости в двух точках потока 171
 — между скоростями в двух различных точках потока 39
 — скорости двойная 42, 43
 — — —, ее измерение 127
 — — поперечная 42
 — — продольная 42
 — — тройная 45
 — — —, ее измерение 127
 — эйлера 64
 — — временная 53, 66, 129
 — — продольная 156
 — — пространственная 65, 128, 129
 Корсина формула 119
 Коэффициент вихревого переноса 36
 — вихревой вязкости 31, 311, 324, 327, 329, 330
 — — диффузии 33
 — восстановления 429
 — вязкости второй 26
 — — динамический 26
 — — первый 26
 — двойной эйлеровой корреляции 112
 — диффузии 57
 — молекулярного переноса 36
 — перемежаемости 469, 570, 571
 — поперечной корреляции скорости 42, 47, 114, 128, 178
 — продольной корреляции между пульсациями скорости 114
 — — — скорости 42, 47, 129, 178
- Коэффициент тензора двойных корреляций скорости 42
 — теплоотдачи 94
 — тройной корреляции скорости 131
 — турбулентной вязкости кинематический 227
 — турбулентности 36
 — эйлеровой корреляции 53
 Крамерса формула 95
 Критерий Грасгофа 94
 — Нуссельта 94
 — Прандтля 94
 — Рейнольдса 94
 Куэтта течение 96
- Лагранжа метод 324
 Лиссажу фигуры 130
 Лойцянского инвариант 192, 210, 244
 — интеграл 192, 194, 195, 222, 233
- Масштаб вихревой диффузии 64
 — времени 12
 — диссипации 50
 — интегральный 51
 — — эйлеров 54
 — лагранжев времени 63, 156
 — пространственный 12
 — турбулентности 12, 51
 — —, его измерение 132
 Маха число 289
 — — среднеквадратичное 289
 Метод баланса энергии 86
 — взвешенных частиц 155
 — возмущения 86
 — диффузионный 157, 163
 — интерференционный Маха 158
 — Лагранжа 324
 — мыльных пузырей 154
 — оптический 158
 — постоянного тока 98, 99, 100, 125
 — постоянной температуры 98, 99, 142, 144, 145
 — создания локальной зоны высокой температуры 154
 — теневой 158
 — Циглера 144
 — Эйлера 324
 — электромагнитной индукции 151
 Методы, основанные на визуализации течения 153
 Микромасштаб времени 63
 — диссипации 50

- Микромасштаб турбулентности временной эйлеров 54
 Моль жидкий 323
- Навье—Стокса уравнения 27
 Напряжения вязкие 30
 — рейнольдсовы 30
 — турбулентные 30
 Насадок Пито 161
 Неустойчивость течения вторичная 87
 Нуссельта критерий 94
 — число 123, 124, 623
- Отрыв пограничного слоя 535
- Переменяемость течения 23
 Перенос скалярной субстанции при турбулентных движениях 36
 — турбулентный 322
 Пито насадок 161
 — трубка 162
 Подобие 170
 Подслой вязкий 538, 546, 581, 584
 — ламинарный 538
 Поле течения изотропное 39
 — — квазистационарное 40
 Польгаузена формула 124
 Поток — см. *Течение*
 Прандтля критерий 94
 — число 116
 — — турбулентное 634, 636
 Псевдотурбулентность 11
 Пульсации давления при изотропной турбулентности 283
 — концентрации, их измерение 141
 — плотности 158
 — скорости 13, 37
 — температуры 282
 — —, их измерение 137
 Путь смещения 323, 348
- Разряд Таунсенда 148
 — темновой 148
 — тлеющий 148
 — электрический 148
 Распределение спектральное скалярной субстанции 265
 Рейнольдса критерий 94
 — число 17, 214, 218, 220, 221, 242, 535
 Рейхардта теория 340, 342, 439, 453, 457, 482, 487
- Скорость динамическая 539
 — осредненная, ее измерение 163
 Слой переходный 546
 — пограничный ламинарный на плоской пластине 534
 — — на гладкой стенке 539
 — — на шероховатой стенке 541
 — — турбулентный на плоской пластине 538
 — постоянного напряжения 542
 Спектр Колмогорова 234, 242
 — турбулентности, его измерение 132
 — энергетический 16
 — — одномерный 71
 — — пространственный 195
 Степень турбулентности 13
 Струя круглая свободная 471
- Таунсенда разряд 148
 Температура пленочная 95
 — торможения адиабатическая 429
 — — действительная 429
 Тензор двойных корреляций скорости 40
 — диффузии 33
 — изотропный второго ранга 174, 175
 — — третьего ранга 186
 — корреляционный второго ранга 171, 174
 — — первого ранга 45, 171
 — — третьего ранга 45, 171, 182
 — напряжений 25
 — скоростей деформации 26
 — тройных корреляций изотропный 187
 Теория Буссинеска 439, 471
 — Бэрона 343
 — переноса завихренности 329, 348, 354, 456, 480, 486
 — пути смещения 323, 324, 334, 354, 372, 439, 452, 456, 479, 486
 — Рейхардта 340, 342, 439, 453, 457, 482, 487
 Термоанемометр 93, 94
 — с нагретой нитью 93, 145
 Течение диссипативное 10
 — в круглой свободной струе 471, 484, 488, 501
 — в нагретой круглой свободной струе 506
 — в пограничном слое 522, 525
 — в следе за цилиндром 448, 457, 462, 545
 — в трубе 523, 533, 594, 601, 614

- Течение вдоль плоской пластины 523
 — Куэтта 11, 86
 — неизотропное 169
 — неупорядоченное 9
 — перемежающееся 29, 339
 — псевдотурбулентное 11, 17
 — турбулентное 9
 — — в плоском канале 190
 — — изотропное 39
 — — реальное 169
 — — со сдвигом 294, 400, 510
- Толщина вытеснения пограничного слоя 530
 — вязкого подслоя 539
 — диссипации 532
 — пограничного слоя 530
 — потери импульса 531
 — — энергии 531
- Точка перехода к турбулентному течению 535
- Труба вихревая Ранка — Хильша 429
- Турбулентность 9, 637
 — анизотропная 11
 — в потоке со сдвигом 11
 — гомологичная 11
 — изотропная 11, 41, 169, 187, 242, 259
 — — неизотропная 11, 293
 — — свободная 438
 — однородная 11, 293, 303, 307
 — пристеночная 10, 619
 — — неизотропная 522
 — реальная 11
 — свободная 10, 346, 438
- Тэйлора гипотеза 54
- Уравнение диффузии вещества в пространстве при наличии сферической симметрии 192
 — Кармана—Хауэрта 189, 213, 250
 — неразрывности 23
 — — в цилиндрических координатах 33
 — теплопроводности в пространстве при наличии сферической симметрии 192
- Уравнение энергетического спектра динамическое 206
 Уравнения Навье — Стокса 27
 Уровень турбулентности 13
 Участок входной 593
- Фигуры Лиссажу 130
 Фика закон 584
 Формпараметр 538
 Формула Кармана 233
 — Кинга 97
 — Коважного 124
 — Корсина 119
 — Крамерса 95
 — Польгаузена 124
 — Эккерта 124
- Формулы для двойных корреляций эмпирические 67
- Функция корреляционная 307
 — спектральная 307
 — — переноса 213
- Циглера метод 144
- Частица жидкая 323
- Число волновое 196, 276
 — Маха 289
 — — среднеквадратичное 289
 — Нуссельта 123, 124, 623
 — Прандтля 116
 — — турбулентное 622, 634, 636
 — — эффективное 622
 — Рейнольдса 214, 218, 220, 221, 242, 535
 — — критическое 86, 535, 538
 — — турбулентности 221
- Шероховатость песочная 561
 «Шлирен»-метод Теплера 158
- Эйлера метод 324
 Эккерта формула 124
- Ядро течения в трубе 596